LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN MA1103
3. juni 2014

Vanlige forbehold, KH

Oppgave 1

Ved kjerneregelen har vi da $\frac{\partial x}{\partial u} = 1 = \frac{\partial y}{\partial u}$ og $\frac{\partial x}{\partial v} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial v} = -1$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

Oppgave 2

$$\nabla T = (e^{x+2y+3z}, 2e^{x+2y+3z}, 3e^{x+2y+3z})$$

$$\nabla T(0,0,0) = (1,2,3), \quad -\nabla T(0,0,0) = -(1,2,3)$$

Vi vet at funksjonen, her temperaturen, vokser mest i retning gradienten, og avtar mest i retning −gradienten. De retningsderiverte i disse to retningene er hhv

$$(1,2,3)\cdot\frac{(1,2,3)}{\|(1,2,3)\|} = \|(1,2,3)\| = \underline{\sqrt{14}}$$

og

$$(1,2,3)\cdot\frac{-(1,2,3)}{\|-(1,2,3)\|} = -\|(1,2,3)\| = \underline{-\sqrt{14}}$$

Oppgave 3

a) Vi vil maksimere/minimere x^2+xy+y^2 når $x^2+y^2=1$ (1).
Da (1) er en lukket og begrenset mengde har problemet løsninger. Ved Lagrange benyttes i tillegg

$$(2x+y, 2y+x) = \lambda(2x, 2y) \text{ der } (x,y)\neq\bar{0} \text{ av (1)},$$

eller $2(1-\lambda)x = -y$ (2), $2(1-\lambda)y = -x$ (3).

$\lambda = 1 \underset{(2)(3)}{\Longrightarrow} (x,y) = (0,0)$ noe som strider mot (1).

$\lambda \neq 1 \underset{(2)(3)}{\Longrightarrow} \frac{x}{y} = \frac{y}{x}, x^2 = y^2 \underset{(1)}{\Longrightarrow} \underline{x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$ (alle komb. av tegn).

Største verdien av x^2+xy+y^2, $\underline{3/2}$, når x, y over har samme tegn.
Minste verdien — " —, $\underline{1/2}$, — " — motsatt tegn.

b) Nå skal vi finne absolutt (globalt) maksimum for $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ på enhetsdisken $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$.

Igjen, D er en lukket begrenset mengde og f en glatt funksjon på D; f har absolutt maksimum og minimum på D. – Kandidater for slike punkter er i tillegg til punktene vi fant i a) kritiske punkt i det indre av D, dvs i $\{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\}$. Har

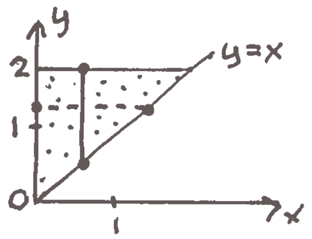
$$\left.\begin{aligned} f_x &= 2x + y = 0 \\ f_y &= x + 2y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x,y) = (0,0).$$

Ett kritisk punkt, $(0,0)$, $f(0,0) = \underline{0}$

Da $0 < \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$, blir absolutt minimum 0 og maksimum $3/2$.

NB! Annenderiverttesten vil bare gi at $(0,0)$ er et lokalt minimum. – Her er det lett å se at $f(x,y) \ge 0$ (HVORFOR?).

Oppgave 4



$$\int_0^2 \int_x^2 e^{y^2} dx = \int_0^2 \int_0^y e^{y^2} dx\, dy = \int_0^2 y e^{y^2} dy$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{y^2}\right]_0^2 = \underline{\frac{1}{2}(e^4 - 1)}$$

Oppgave 5

Kriteriene for å anvende Greens teorem er oppfylt. Vi orienterer C mot klokka og har da

$$I = \int_C (5y - e^{\sin x})dx + [10x - \sin(y^3 + 8y)]dy$$

$$= \iint_D (10 - 5)\, dx\, dy \quad \text{der } D = \{(x,y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 2^2\}$$

slik at $\underline{I} = 5 \,\text{Areal}(D) = 5\pi 2^2 = \underline{20\pi}$

Oppgave 8

At $f: A \to \mathbb{R}^m$ er en kontinuerlig funksjon betyr at f er kontinuerlig for alle $\underline{y} \in A$. Bruker ε-δ definisjonen til å påvise det.

Altså: $\varepsilon > 0$ gitt. Vil vise at det fins en $\delta > 0$ slik at $\underline{x} \in A$, $\|\underline{x} - \underline{y}\| < \delta \Rightarrow \|f(\underline{x}) - f(\underline{y})\| < \varepsilon$.

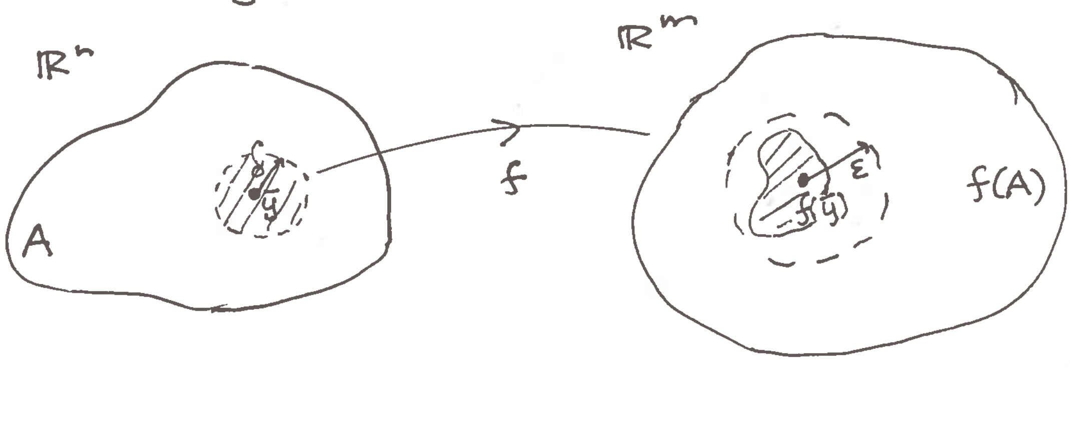
Velger $\delta = (\varepsilon / K)^{1/\alpha}$. (Ønsker $K \|x - y\|^\alpha < \varepsilon$. Har kladdet ☺)

For $\underline{x} \in A$, $\|\underline{x} - \underline{y}\| < \delta$ gjelder da

$$\|f(\underline{x}) - f(\underline{y})\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gitt egenskap ved } f}}{\le} K \|\underline{x} - \underline{y}\|^\alpha < K \delta^\alpha = K \cdot \varepsilon/K = \varepsilon$$

QED

(Boka skriver $\lim_{\underline{x} \to \underline{y}} f(\underline{x}) = f(\underline{y})$ som definisjon og forklarer dette noe vagt. ε-δ definisjonen skrives opp som en setning - Theorem 7 - og kalles en reformulering.



)

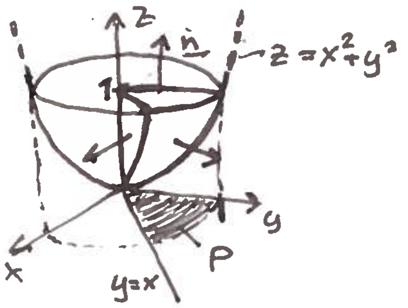
Oppgave 6

a) $$\text{curl}\ \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & xy & 2x^2-z^2 \end{vmatrix} = \underline{(0, -4x, y)}$$

$$\text{div}\ \underline{F} = \frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial xy}{\partial y} + \frac{\partial(2x^2-z^2)}{\partial z} = 2x + x - 2z = \underline{3x-2z}$$

b)
Da curl $\underline{F} \neq (0,0,0)$, er $\underline{F}$ <u>ikke et gradientfelt</u> til en C^2-funksjon, og da div $\underline{F} \neq 0$, er $\underline{F}$ heller <u>ikke</u> <u>curl til et C^2- vektorfelt</u>.
(At curl av gradienten til en C^2- funksjon er $\underline{0}$, og divergensen til curl av et C^2-vektorfelt er 0, er setninger i boka. Disse lar seg også lett verifisere.)

Oppgave 7



$W: \ x^2+y^2 \le z \le 1, \ 0 \le x \le y$

$S = \partial W$

$\underline{F}(x,y,z) = (y, x, xz)$

Bruker divergensteoremet (på formelarket).

div $\underline{F} = 0 + 0 + x = x$.

$$\iint_{\partial W} \underline{F} \cdot d\underline{S} \underset{DT}{=} \iiint_W x \, dV = \iint_P \int_{z=x^2+y^2}^{1} x \, dz \, dA$$

$$= \iint_P x(1-(x^2+y^2)) \, dA$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r\cos\theta (1-r^2) \, r \, dr \, d\theta$$

$$= \left[\sin\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{2}{15} = \underline{\frac{2-\sqrt{2}}{15}}$$