

# 10. ØVING

Med unntak av #6.2.2 (a) var resten odde oppgaver med fasit! I tillegg til partallsoppgaven nøyer jeg meg derfor med å skrive ut LF på et par oppgaver som falt vanskelig for endel.

#6.2.2 (a)

$$\iint_R (5x+y)^3 (x+9y)^4 dx dy$$

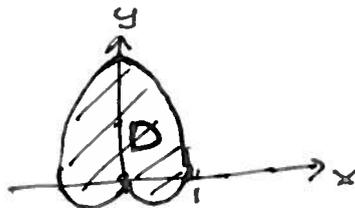
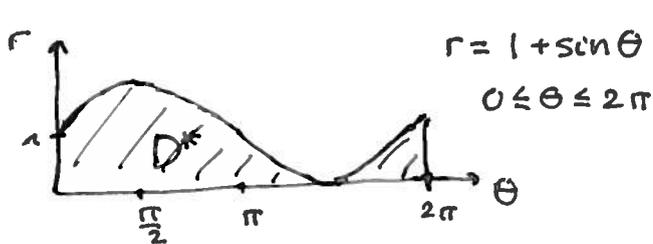
Foreslår substitusjoner  $u = 5x + y$ ,  $v = x + 9y$ ,

$$\text{eller } \left. \begin{aligned} x &= \frac{9}{44}u - \frac{1}{44}v \\ y &= -\frac{1}{44}u + \frac{5}{44}v \end{aligned} \right\} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{9}{44} & -\frac{1}{44} \\ -\frac{1}{44} & \frac{5}{44} \end{vmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{44}}}$$

(Har da

$$\iint_R (5x+y)^3 (x+9y)^4 dx dy = \int_{R^*} u^3 v^4 \frac{1}{44} du dv)$$

#6.2.13 Se ex 2 s. 318 for generell framgangsmåte.



$$\begin{aligned} A(D) &= \iint_D dx dy = \iint_{D^*} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\sin\theta} r dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1+\sin\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1+2\sin\theta+\sin^2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} (2\pi + 0 + \pi) = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} (\sin^2\theta + \cos^2\theta) d\theta = 2\pi; \quad \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

### #6.2.23

Vi har ei kompakt kule med radius 1, og vil innføre kulekoordinater (Formel (10) s.325).

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

$$dx dy dz = \rho^2 \sin\varphi d\rho d\theta d\varphi$$

$$\iiint_B \frac{dx dy dz}{\sqrt{2+x^2+y^2+z^2}} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho^2 \sin\varphi}{\sqrt{2+\rho^2}} d\rho d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^1 \frac{\rho^2}{\sqrt{2+\rho^2}} d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_0^\pi \sin\varphi d\varphi}_2 = \underline{\underline{4\pi \left[ \sqrt{3}/2 - \log(1+\sqrt{3}) + \log\sqrt{2} \right]}}$$

Formel 58

### #6.3.11

Her skal vi finne massen av ei kompakt kule  $K$  med radius 5 og massetetthet gitt ved

$$\delta(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 1$$

når kulesenteret antas å ligge i origo. Altså

$$M = \iiint_K \delta(x,y,z) dx dy dz.$$

Innfører kulekoordinater (noe som passer både integrasjonsområdet og integranden godt)

$$M = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^5 (2\rho^2 + 1) \rho^2 \sin\varphi d\rho d\theta d\varphi$$

$$= 4\pi \int_0^5 (2\rho^2 + 1) \rho^2 d\rho = 4\pi \left[ \frac{2}{5} \rho^5 + \frac{\rho^3}{3} \right]_0^5$$
$$= 4\pi \cdot 5^3 \left[ 10 + \frac{1}{3} \right] = \underline{\underline{500\pi(10 + \frac{1}{3})}}$$