KOMMENTARER/LF 4ØVING

$\boxed{2.5}$ Det store temaet her er kjerneregelen som ser ut slik vi er vant til fra MA1101, men der produktet generelt blir et matrise-produkt
$$\underline{D}(f \circ g)\underline{x}_0 = \underline{D}f(\underline{y}_0)g(\underline{x}_0) \qquad (1)$$

Spesialtilfellet (2) er spesielt viktig!
DETTE ER UVANT, OG DET TAR TID Å BLI FORTROLIG MED REGNETEKNIKKEN. (Øvelse gjør som alltid mester!)

#3(a)
Skal finne $\overset{h}{(f\circ \underline{c})}'(t)$ ved $\overset{i)}{}$direkte innsetting og $\overset{ii)}{}$ ved kjerneregelen: $f(x,y) = xy$, $\underline{c}(t) = (\overset{x}{e^t}, \overset{y}{\cos t})$

i) $h(t) = (f\circ\underline{c})(t) = e^t \cos t$ s.a. $h'(t) = \underline{e^t(\cos t - \sin t)}$

ii) $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} = y\,e^t + x(-\sin t) = \underline{e^t(\cos t - \sin t)}$

#6) Dette er den romlige varianten av det ufullstendige eksempel 4.
$x = \rho \sin\phi \cos\theta$, $y = \rho\sin\phi\sin\theta$, $z = \rho\sin\phi$

Altså, siden f er deriverbar,
$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \rho}.$$
$$= \sin\phi\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\phi\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y} + \sin\phi\frac{\partial f}{\partial z}$$

Tilsvarende for $\dfrac{\partial f}{\partial \phi}$ og $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$. "in terms of" betyr her: ved hjelp av/uttrykt ved

#7) Se ex 3 s.130.
$f(u,v) = (\tan(u-1) - e^v, u^2 - v^2)$
$g(x,y) = (e^{x-y}, x-y)$
$(f\circ g)(x,y) = f(e^{x-y}, x-y) = (\tan(e^{x-y}-1) - e^{x-y}, e^{2(x-y)} - (x-y)^2)$

$\underline{D}(f\circ g)(1,1) = ?$ $\quad \underline{g(1,1)} = (e^0, 0) = \underline{(1,0)}$

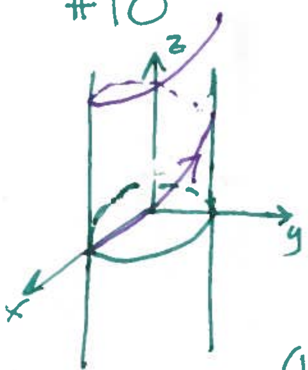
$$\underline{D}\, f(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos^2(u-1)} & -e^v \\ 2u & -2v \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}\, g(x,y) = \begin{bmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}(f\circ g)(1,1) = \underline{D} f(1,0)\, \underline{D} g(1,1) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}}}$$

#10



(a) $T(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$

$T(t) = \cos^2 t + \sin^2 t + t^2 = \underline{1 + t^2}$

$T'(t) = \underline{\underline{2t}}$ $\quad$ Alt. $\frac{dT}{dt} = \underline{\nabla} T \cdot \begin{bmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{bmatrix}$

(b) $t_0 = \frac{\pi}{2}$ (Å sperre etter lineariseringen $T(t_0) + (t - t_0)\, T'(t_0)$ virker litt „tullete" i denne oppgaven)

$T(\frac{\pi}{2} + 0.01) \approx T(\frac{\pi}{2}) + 0.01\, T'(\frac{\pi}{2}) = 1 + (\frac{\pi}{2})^2 + 0.01\pi = \underline{\underline{3.4989}}$

$(T(\frac{\pi}{2} + 0.01) = 1 + (\frac{\pi}{2} + 0.01)^2 = \underline{1 + (\frac{\pi}{2})^2 + 0.01\pi} + 0.0001)$

#21 hører egentlig ikke hjemme her (?), men var kanskje for vanskelig i forrige seksjon. Arbeidskrevende er den i hvert fall, men Logaritmisk derivasjon hjelper!

$$P(V-b)\, e^{a/RVT} = RT$$ der a, b, R konstanter, $V = V(T,P)$

$$\ln P + \ln(V-b) + \frac{a}{RVT} \underset{(-)}{=} \ln R + \ln T$$ P.der på begge sider mhp T (P betraktes som konst)

$$\frac{1}{V-b}\frac{\partial V}{\partial T} - \frac{a}{R}\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}T + V\right)}{(VT)^2} = \frac{1}{T}$$

$$\frac{\partial V}{\partial T}\left(\frac{1}{V-b} - \frac{a}{RV^2T}\right) = \frac{a}{RVT^2} + \frac{1}{T}$$

$$\frac{\partial V}{\partial T}\left[\frac{1}{RT}\left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right)\right] = \frac{1}{RT}\left(\frac{a}{VT} + R\right)$$

Formelen følger!

$\boxed{2.6}$ Gradienten står sentralt i pensum. Inngår i formel for retningsderivert. Gir normal til nivåkurver og nivåflater.

#3 $\frac{d}{dx}(x^y) = y x^{y-1}$ da $x^y = e^{y \ln x}$ ($x, y > 0$ her)

#4 $f(x,y) = y\cos(\pi x) - x\cos(\pi y) + 10$

$\nabla f = (-\pi y \sin(\pi x) - \cos(\pi y),\ \cos(\pi x) + x\pi \sin(\pi y))$

$(\nabla f)(2,1) = (1,1)$; $(1,-1) \perp (1,1)$ da $1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 = 0$

Bør gå i retning $(1,-1)$ (eller mult. av denne)

#8(c) $(*)\ xyz = 1$ i $(1,1,1)$ Nivåflate til $f(x,y,z) = xyz$;

$\nabla f = (yz, xz, xy)$, og i $(1,1,1)$: $(1,1,1)$ flatenormal

Tangentplan til $(*)$ i $(1,1,1)$ blir altså

$$1\cdot(x-1) + 1\cdot(y-1) + 1\cdot(z-1) = 0$$

$$\underline{x + y + z = 3}$$

#13 $\cos(xy) - e^z = -2$

er en nivåflate til $f(x,y,z) = \cos(xy) - e^z$ i $(1, \pi, 0)$.

$\underline{\nabla} f = (-y\sin(xy), -x\sin(xy), -e^z)$. Flatenormal i

$(1,\pi,0)$ er $\underline{\nabla} f(1,\pi,0) = \underline{(0,0,-1) = -\underline{k}}$,

som er en enhetsnormal vektor (det samme er $\underline{k}$).

21 (Se ex 1, s135)

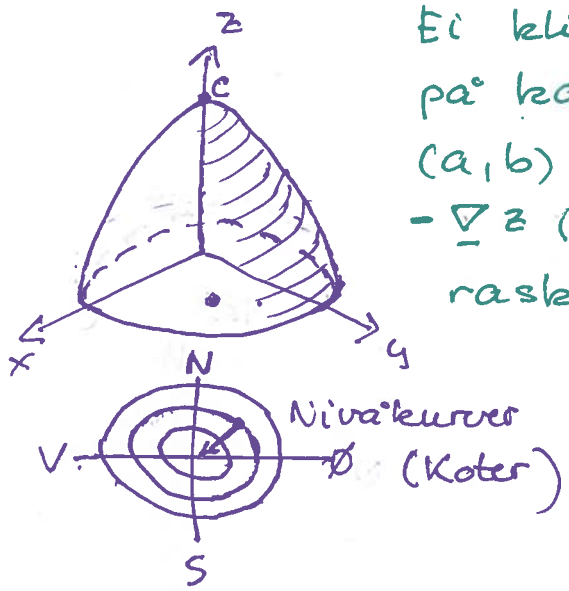
$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ da $r = \|(x,y,z)\|$

$$\underline{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -r^{-2}\left(\frac{2}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}x, \frac{2}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}y, \frac{2}{2}(x^2+y^2+y^2)z\right)$$

$$= -\frac{(x,y,z)}{r^3} = \underline{\underline{-\frac{1}{r^3}\underline{r}}}$$

#26 Høyden over havet, z, er gitt ved $z = c - ax^2 - by^2$ $(a,b,c > 0)$ Har $\underline{\nabla} z = (-2ax, -2by)$, og denne peker i retningen høyden stiger mest i (x,y).

<u>I (1,1) stiger</u> altså <u>høyden mest i retning $-(a,b)$.</u>



Ei klinkekule som slippes i (1,1) – på kartet! – vil trille i retning (a,b). I denne retningen, $-\underline{\nabla} z(1,1) = 2(a,b)$, avtar høyden raskest.

<u>Ekstra</u> (Kfr. #2.6.4)

Kan gå i retning $\pm(b,-a)$ for å holde seg på samme høyde.