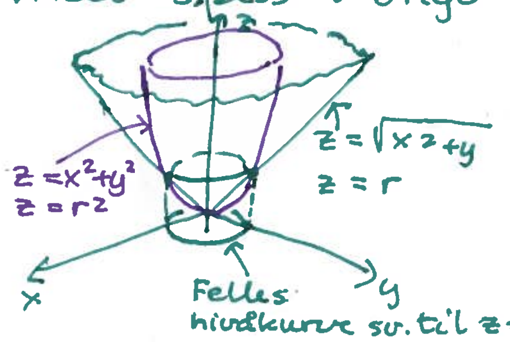
2. Øving (2.1 og 2.2)

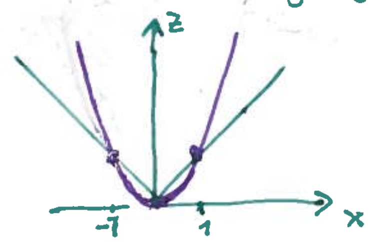
Med forbehold om skrivefeil! KH

I $\boxed{2.1}$ får vi trening i nivåkurver/nivåflater og grafer. Disse oppgavene skapte problemer:

NB! #8 Vi skal skissere nivåkurver ("level sets") $L_c = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = c\}$ og $L_c = \{(x,y) \mid \sqrt{x^2+y^2} = c\}$.
I begge tilfeller er $L_c = \phi$ når $c < 0$, $L_c = \{(0,0)\}$ når $c = 0$ mens vi får sirkler når $c = 1, 4, 9$. Grafene til $z = x^2+y^2$ og $z = \sqrt{x^2+y^2}$ er svært forskjellige, hhv en rotasjonsparaboloide og en kjegleflate med spiss i origo



Snitt med grafene og xz-planet



Når det gjelder $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \longmapsto w$ eller $w = f(x,y,z)$ *) blir grafen firedimensjonal, så nivåflatene ("level surfaces") $L_c = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z)\}$ er et nyttig hjelpemiddel!

#19 $L_c = \{(x,y,z) \mid -x^2-y^2-z^2 = c\}$
Altså blir $L_c = \phi$ når $c > 0$, $L_c = \{(0,0,0)\}$ når $c = 0$ og L_c kuleflater med sentrum i origo og radius $\sqrt{-c}$ for $c < 0$. Et snitt med f.eks. xz-planet blir en sirkel.

NB! # 21 Her er $w = f(x,y,z) = x^2+y^2$.
$L_c = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = c\}$, altså ϕ når $c < 0$, $\{0,0,z\}$ når $c=0$ og punkter (x,y,z) der $x^2+y^2 = (\sqrt{c})^2$ når $c > 0$. Den siste nivåfaten er en uendelig sylinderflate med z-aksen som akse og radius $\sqrt{c}$. Snitt med xz-planet linjene $x = \pm\sqrt{c}$.

*) Tenk på $f(x,y,z)$ som temperaturen i et punkt (x,y,z)

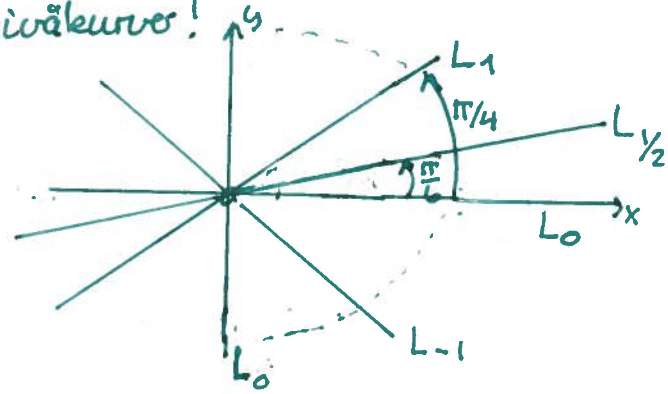
#40 Vi skal bruke polarkoordinater til å beskrive nivåkurvene $z = f(x,y) = 2xy/x^2+y^2$ når $(x,y) \neq 0$, $f(0,0)=0$.
Uten videre L_0 = x-aksen $\cup$ y-aksen.

For $x^2+y^2 \neq 0$ har vi med polarkoordinater

$$z = \frac{2r^2 \sin\theta \cos\theta}{r^2} = \sin 2\theta \quad , \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$L_c = \{(r,\theta) \mid \sin 2\theta = c\}$, $L_c = \phi$ når $|c| > 1$.

Observer at <u>z er konstant</u> på hver stråle $(\theta = \theta_0, r > 0)$ og da $\sin 2\theta_0 = \sin 2(\theta_0 + \pi)$ <u>på hver linje „punktert" i origo</u>; nivåkurver!

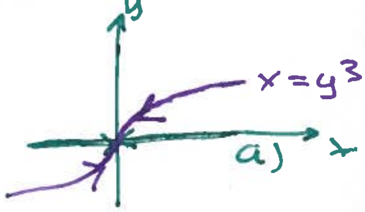


Tegn flere nivålinjer! (Hvordan ser flaten $z = f(x,y)$ ut?)

I $\boxed{2.2}$ er det innøving av grenser og kontinuitet. Oppgaver som voldte problemer:

#6

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ når } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{xy^3}{x^2+y^6} \text{ når } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$



a) $\lim\limits_{(0,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0y^3}{0^2+y^6} = \lim\limits_{y\to 0} 0 = \underline{\underline{0}}$ (MA1101)

b) $(x,y) = (y^3, y) \to (0,0)$. Hva skjer?

$$\lim_{(y^3,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^3 y^3}{y^6+y^6} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

c) Da $f(0,0) = 0$ forteller resultatet i b) at f <u>ikke</u> er kont. i $(0,0)$. (Var f kontinuerlig i $(0,0)$, måtte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ uansett „vegvalg".)

#11

(a)) b) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \sin(xyz)/xyz$: $\sqrt{x^2+y^2+z^2} \to 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \to 0$

slik at $x^2, y^2, z^2 \to 0$, noe som impliserer at $t = xyz \to 0$.

Vet $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$. Altså $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(xyz)}{xyz} = \underline{\underline{1}}$

Alternativt kan vi innføre kulekoordinater:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \sin(xyz)/xyz = \lim_{\rho\to 0} \frac{\sin(\rho\sin\phi\cos\theta\,\rho\sin\phi\sin\theta\,\rho\cos\phi)}{\rho\sin\phi\cos\theta\,\rho\sin\phi\sin\theta\,\rho\cos\phi}$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to 0 \\ (\rho^3\to 0)}} \frac{\sin\rho^3}{\rho^3} \quad (|\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta\cos\phi| \le 1)$$

c) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} x^2+3y^2/x+1 = \lim_{x,y,z\to 0} 0+3\cdot 0/0+1 = \lim_{x,y,z\to 0} 0 = \underline{\underline{0}}$

$\Leftrightarrow x,y,z \to 0$ $\quad\uparrow$ Grensesetninger

#33

At $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er kontinuerlig betyr at f er kontinuerlig i $\underline{x}_0$ for alle $\underline{x}_0 \in A$. – Viser dette ved ε-δ definisjonen:

$\underline{\varepsilon > 0 \text{ gitt}}$; skal vise at det fins en $\delta > 0$ slik at

$$\|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)\| < \varepsilon.$$

Velger $\underline{\delta = (\varepsilon/K)^{1/\alpha}}$. (Har regnet på kladd!)

Har da at for $\|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta$ gjelder

$$\|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)\| \underset{\text{GITT EGENSKAP VED } f}{\le} K\|\underline{x} - \underline{x}_0\|^\alpha < K\delta^\alpha = K\,\varepsilon/K = \varepsilon$$

■