

LØSNINGSFORSLAG ØVING 6

Vanlige forhold! K#

På s181 står det en strategi for å finne abs. maks. og min. for en kont. funksjon på et lukket begrenset område $D = U \cup \partial U$. Det står også at vi, i tillegg til parametrisering av ∂U , kan bruke Lagranges multiplikator metode!
L M M

Denne metoden er presentert i T. 8 s. 186. Merk at setningen sier at HVIS f restriktet til S har et lokalt min eller maks, SÅ finnes λ slike at ...

Alle oppgavene er fra 3.4:

#3 Vi skal finne ekstremalpunktene til

$f(x, y, z) = x - y + z$ når $x^2 + y^2 + z^2 = g(x, y, z) = 2$
(f er en kontinuerlig funksjon på en lukket, begrenset mengde og har både maks. og min.! - Her drøyer det seg om en linear funksjon på et kuleskall.)

$$\left. \begin{array}{l} \nabla f = (1, -1, 1) \\ \nabla g = (2x, 2y, 2z) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ønsker} \\ \nabla f = \lambda \nabla g \end{array}$$

Søker altså x, y, z slike at

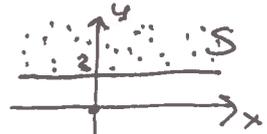
$$\left. \begin{array}{l} 1 = \lambda 2x \\ -1 = \lambda 2y \\ 1 = \lambda 2z \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ (\lambda \neq 0) \end{array} \underline{x = z, y = -z} \text{ der } x^2 + y^2 + z^2 = \underline{3z^2 = 2}$$

Mulige ekstremalpunkter $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$
 $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}} \right)$

Det første gir $f = \sqrt{6}$, det andre $f = -\sqrt{6}$ altså hhv maks og min. Begge er ekstremalpunkter!

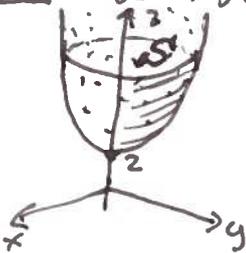
Skal finne relative ekstrema for $f|_S$ i #9 og #11.

#9 $f(x,y) = x^2 + y^2, S = \{(x,y) | y \geq 2\}$



f er størst/minst der $\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$ er størst/minst i S .
 Avstanden fra origo til $(x,y) \in S$ er minst når $x=0, y=2$;
 min. verdi blir altså $0^2 + 2^2 = \underline{\underline{4}}$. Ingen største verdi.

#11 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, S = \{(x,y,z) | z \geq 2 + x^2 + y^2\}$

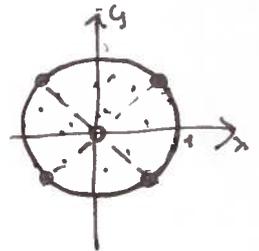


Her er det også spørsmål om (kvadratet av) avstanden fra $(x,y,z) \in S$ til origo.
 Det følger da at $f|_S$ ikke har noen noen største verdi mens minsteverdien er $\underline{\underline{4}}$

#13 Gitt $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, kont. funksjon, på lukket begrenset mengde $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$. Vi vet da at f har såvel maksimum som minimum, og disse finnes ved å sammenligne verdiene i de kritiske punktene \circ

Kritiske punkt i $x^2 + y^2 < 1$:

$$\left. \begin{aligned} f_x = 2x + y = 0 \\ f_y = 2y + x = 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow x = y = 0; f(0,0) = \underline{\underline{0}}$$



Kritiske punkt på enhets sirkelen $x^2 + y^2 = 1$ ved LHM:

Har $f(x,y) = x^2 + xy + y^2, g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$ Søker da løsninger av (1) slik at $\nabla f = \lambda \nabla g$ eller

$$(2x + y, 2y + x) = \lambda(2x, 2y)$$

dvs. $2(1-\lambda)x = -y$ (2)

$2(1-\lambda)y = -x$ (3)

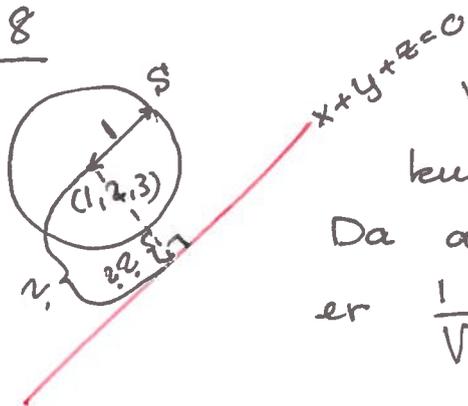
Enten x eller $y \neq 0$, og $\lambda \neq 1$.

Au (2) og (3) $\frac{y}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow y^2 = x^2 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ (alle komb.)

$f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}, f(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}}) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$. Altså

$f_{\max} = \frac{3}{2}, f_{\min} = 0$

#18



Vi skal finne avstanden fra kuleflata S til planet $x+y+z=0$.
 Da avstanden fra $(1, 2, 3)$ til $x+y+z=0$ er $\frac{1+2+3}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ ved kjent formel,

blir søkt avstand $2\sqrt{3} - 1$

Alternativt : Minimer $f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2$ når $g(x,y,z) = x+y+z=0$ ved LMM. Får da $(2\sqrt{3})^2$.
 (Minimerer avstanden i kvadrat for å unngå kvadrattot i funksjonen f .)

#19

(a) Vil minimere $f(x,y,z) = x+y+z$ når $g(x,y,z) = xyz = 27$

LMM : $(1, 1, 1) = \lambda(yz, xz, xy)$ Ser $\lambda \neq 0$ og $x, y, z \neq 0$

$$\left. \begin{array}{l} 1 = \lambda yz \\ 1 = \lambda xz \\ 1 = \lambda xy \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = x \\ z = y \end{array} \left. \right\} x = y = z$$

$x^3 = 27 \Leftrightarrow x = 3$, $f(3,3,3) = 9$

⚠ Dette er eneste kandidat til minimal sum, men har problemet løsning i reelle tall?

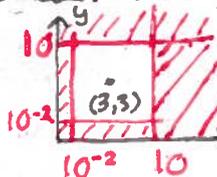
NEI! $\frac{1}{N}(-N)(-27) = 27$, sum $\frac{1}{N} - N - 27 \rightarrow -\infty$ når $N \rightarrow \infty$.

Problemet har løsningen over (a) om vi ser på $x, y, z > 0$.

Hvordan ville du begrunne det? Kanskje "tryggest" å studere $F = x + y + \frac{27}{xy}$ som har ett kritisk punkt $(3, 3)$.

Når x eller $y \rightarrow \infty$ vil $F \rightarrow \infty$. Likeså vil $F \rightarrow \infty$ når $xy \rightarrow 0$. Mer konkret kan vi lage et kvadrat K slik

at $F \geq 10$ i $\mathbb{R}^2 \setminus K$. K er en lukket, legrenset mengde. F har minimum i K , $(3, 3)$ eneste kandidat.



(b) Tilsvarende!

