Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Lisa Lorentzen Telefon 73 59 35 48 / 73 59 35 20
Marius Thaule Telefon 73 59 35 30 / 73 59 35 20

Kontinuasjonseksamen i MA1103 Flerdimensjonal analyse

Bokmål
Mandag 6. august 2012
Tid: 09.00 – 13.00

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (Hewlett Packard HP30S eller Citizen SR-270X)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensur: 27. august 2012.

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 Vektorfeltet $\mathbf{F}$ er definert for alle (x, y, z) i rommet ved

$$\mathbf{F}(x,y,z) = 2xyz\,\mathbf{i} + z(x^2 - 4yz^2)\,\mathbf{j} + y(x^2 - 6yz^2)\,\mathbf{k}.$$

a) Vis at $\mathbf{F}$ er et konservativt vektorfelt.

b) Regn ut

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der C er kurven i rommet gitt ved $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3)\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$.

Oppgave 2 Finn største og minste verdi til funksjonen $f(x, y, z) = z$ langs skjæringskurven mellom de to flatene $x^2 + 2y^2 = 1$ og $z = x - 4y$.

Oppgave 3 La R være området i xy-planet som er avgrenset av de to kurvene

$$3x^2 - y^2 = 3 \quad \text{for } x \ge 1 \qquad \text{og} \qquad x + y^2 = 11.$$

Skissér de to kurvene og beregn integralet $\iint_R x\,dA$.

Oppgave 4 Finn massesenteret (tyngdepunktet) til legemet gitt ved $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $z \geq 0$, når massetettheten er proporsjonal med kvadratet av avstanden fra origo.

Oppgave 5 Funksjonen f er gitt ved $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

a) Vis at f er kontinuerlig i origo.

b) En kan vise at f ikke er kontinuerlig deriverbar i origo. Vis likevel at den retningsderiverte $(D_{\mathbf{u}}f)|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(tu_1,tu_2)-f(0,0)}{t}$ eksisterer for alle enhetsvektorer $\mathbf{u} = u_1\,\mathbf{i} + u_2\,\mathbf{j}$.

Oppgave 6 Legemet T er avgrenset av paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$ og planet $z = 4$.

a) Finn volumet til T.

La S være den delen av overflaten til T som ligger på paraboloiden $z = 4x^2 + 4y^2$, og la $\mathbf{n}$ være enhetsnormalen til S som peker ut av legemet T. La videre $\mathbf{F}$ være vektorfeltet definert ved

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{yz}{8\pi}\mathbf{i} - \frac{x}{2\pi}\mathbf{j} + \frac{z}{4}\mathbf{k}.$$

b) Regn ut

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma,$$

c) Regn ut

$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma.$$

Formelliste følger vedlagt på neste side.

Formelliste

Dekomponering av akselerasjonsvektor:

$$\mathbf{a}(t) = v'(t)\mathbf{T}(t) + \kappa(t)v^2(t)\mathbf{N}(t)$$

Annenderiverttesten er basert på:

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

Koordinatsystemer:

Sylinderkoordinater (r,θ,z):

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$
$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

Kulekoordinater (ρ,φ,θ):

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\varphi$$
$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \mathrm{d}V = \rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

Flateintegral:

$$\mathrm{d}\sigma = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Tyngdepunkt og treghetsmoment for romlige legemer:

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\,\mathrm{d}m, \quad \bar{y} = \frac{1}{m}\iiint_T y\,\mathrm{d}m, \quad \bar{z} = \frac{1}{m}\iiint_T z\,\mathrm{d}m, \quad \mathrm{d}m = \delta(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$
$$I_x = \iiint_T (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}m, \quad I_y = \iiint_T (x^2 + z^2)\,\mathrm{d}m, \quad I_z = \iiint_T (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m,$$
$$I_L = \iiint_T R(x,y,z)^2\,\mathrm{d}m$$

Vektoranalyse:

Greens teorem: $\displaystyle\oint_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}A$

Divergensteoremet: $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_T \mathrm{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}V$

Stokes' teorem: $\displaystyle\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s = \iint_S (\mathrm{curl}\,\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma$