# LØSNINGSFORSLAG MA1103 VÅR 2013

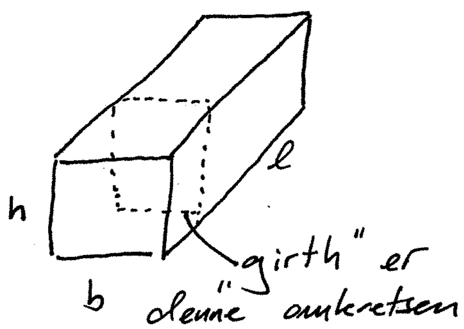
## Oppgave 1

$T(x,y,z,t) = 2x - y + z$ er uavhengig av $t$, så $\frac{\partial T}{\partial t} = \underline{\underline{0}}$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2) - \frac{\partial}{\partial y}(-1) + \frac{\partial}{\partial z}(1) = \underline{\underline{0}}$$

Dermed er høyre og venstre side i likningen like, så $T(x,y,z,t) = 2x - y + z$ er en løsning til varmelikningen.

## Oppgave 2




Vi ser på rektangulære pakker med lengde $l$, bredde $b$ og høyde $h$. Da er „girth" $= 2b + 2h$ og „size"

$$s(l,b,h) = \text{lengde} + \text{„girth"} = l + 2b + 2h.$$

Vi vil se på volumet $v = v(l,b,h) = lbh$ av pakker med $s(l,b,h) \le 130$. Hvis en pakke har $s < 130$ kan volumet alltid gjøres større ved å øke en av sidene, så et eventuelt maksimalt volum må skje når $s = 130$.

Både $s$ og $v$ er glatte funksjoner, så alle ekstremalpunkt for $v$ med bibetingelse $s = 130$ vil tilfredsstille $\nabla v = \lambda \nabla s$. $\nabla v = (bh, lh, lb)$ og $\nabla s = (1,2,2)$

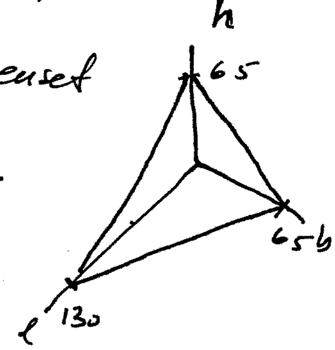
Dermed har vi likningene

1. $bh = \lambda$
2. $lh = 2\lambda$
3. $lb = 2\lambda$
4. $l + 2b + 2h = 130.$

2. & 3. gir $\underline{\underline{b=h}}$ og 1 & 2 gir $\underline{\underline{l=2b}}$. Setter vi dette i 4 får vi $2b+2b+2b=130$, så $b=h=\frac{130}{6}=\underline{\underline{\frac{65}{3}}}$ og $l=\underline{\underline{2\frac{65}{3}}}$, så eneste mulige ekstremalpunkt er $\underline{\underline{\left(2\frac{65}{3}, \frac{65}{3}, \frac{65}{3}\right)}}$

Gir dette et maksimalt volum?

Mulige $(l,b,h)$ for en pakke er $l,b,h \geq 0$ og $l+2b+2h \leq 130$. Dette er en begrenset lukket mengde, og $v$ er kontinuerlig. Dermed vet vi at (globale) maksimum og minimum eksisterer. Vi har allerede argumentert for at at maksimum ikke kan ligge i det indre av området. Hvis en eller flere av $l, b$ & $h$ er null får vi volum null, som er minimum. Dermed er eneste gjenværende mulighet for maksimum i punktet $\frac{65}{3}(2,1,1)$. Dermed får vi et




$\underline{\text{maksimalt volum}}$ $v\left(\frac{2\cdot 65}{3}, \frac{65}{3}, \frac{65}{3}\right) = \underline{\underline{2\left(\frac{65}{3}\right)^3}}$

## Oppgave 3

a) Ved å se på 2.-koordinaten til $(1,2,3)$ ser vi at vi må ta $t=1$ i $\underline{c}(t)=(t^2, 2t, 4-t)$ for at punktet skal ligge på kurven. $\underline{c}(1)=(1^2, 2\cdot 1, 4-1)=\underline{\underline{(1,2,3)}}$, så punktet ligger på kurven.

For å finne en tangentvektor deriverer vi parametriseringen:
$\underline{c}'(t) = (2t, 2, -1)$. Dermed er $\underline{c}'(1) = (2, 2, -1)$ en tangentvektor til kurven i $\underline{c}(1) = (1, 2, 3)$. $(2, 2, -1)$ har lengde $\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{9} = 3$, så $\underline{\underline{\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)}}$ vil være en enhets tangentvektor til kurven i $(1, 2, 3)$.
(Den andre muligheten er $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.)

b) Vi kan bruke $(2, 2, -1)$ som tangentvektor til kurven i $(1, 2, 3)$. Planet gjennom $(1, 2, 3)$ med $(2, 2, -1)$ som normalvektor er dermed gitt ved

$$((x, y, z) - (1, 2, 3)) \cdot (2, 2, -1) = 0$$

$$\underline{2(x-1) + 2(y-2) - (z-3) = 0}$$

eller $\underline{2x + 2y - z = 2}$

Oppgave 4

Alle andrederiverte eksisterer, så vi ~~kan~~ curl $\nabla f$ eksisterer og er

$$\text{curl}\, \nabla f = \nabla \times \nabla f = \nabla \times \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)$$

Fordi alle de andrederiverte er kontinuerlige vet vi at rekkefølgen på derivasjonen er uvesentlig, altså har vi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \quad \text{og} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Så curl $\nabla f = (0, 0, 0)$.

Oppgave 5

a) $f(x,y) = x^3 - xy^2 - 2x^2 + y^2$ er glatt, så kritiske punkt er punkt der $\nabla f(x,y) = (0,0)$.

$\nabla f = (3x^2 - y^2 - 4x, -2xy + 2y)$

$-2xy + 2y = 2y(-x+1)$, så vi må ha $y=0$ eller $x=1$.

$\nabla f(1,y) = (-y^2-1, 0)$. $-y^2-1 \leq -1$, så $-y^2-1$ kan aldri bli null, så $x=1$ gir ingen kritiske punkt.

$\nabla f(x,0) = (3x^2 - 4x, 0)$.

$3x^2 - 4x = x(3x-4)$ er null for $x = 0$ eller $x = \frac{4}{3}$.

Dermed har $f$ kritiske punkt i $\underline{\underline{(0,0)}}$ og $\underline{\underline{(\frac{4}{3},0)}}$.

Vi bruker 2.-derivert testen for å klassifisere de kritiske punktene:

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (6x-4)(-2x+2) - (-2y)^2$$

$D(0,0) = (-4)(2) - 0^2 = -8 < 0$, så $\underline{(0,0) \text{ er et sadelpunkt}}$

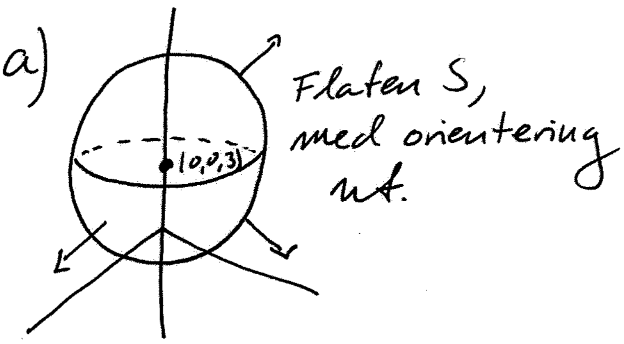
$D(\frac{4}{3},0) = (\frac{6\cdot 4}{3} - 4)(\frac{-2\cdot 4}{3} + 2) - 0^2 = -\frac{8}{3} < 0$, så $\underline{(\frac{4}{3},0) \text{ er et sadelpunkt.}}$

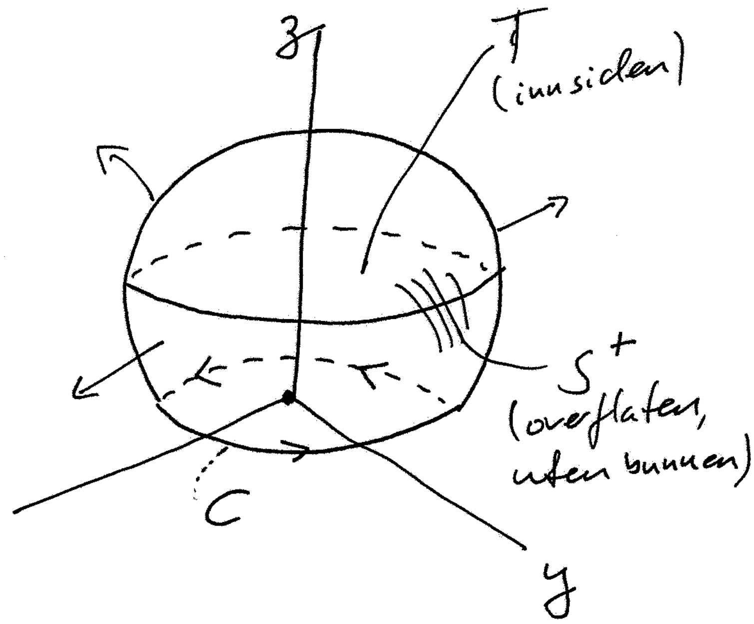
b) Et globalt ekstremalpunkt vil også være et lokalt ekstremalpunkt. Lokale ekstremalpunkt finner vi på randen (som vi ikke har her) eller i kritiske punkt. Men ingen av de kritiske punktene er ekstremalpunkt, så $f$ har ~~[illegible]~~ <u>ingen globale maksimum eller minimum.</u>

Vi kan også se dette mer direkte.
For eksempel er $f(x,0) = x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)$, som vi kan få så stor positiv og negativ verdi for som vi vil.

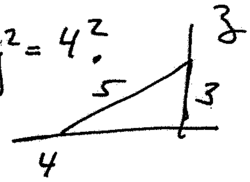
## Oppgave 6

a)




I xy-planet er $z = 0$, så en parametrisering av C er på formen $\underline{c}(t) = (x(t), y(t), 0)$
C er også en del av S, så avstanden til $(0,0,3)$ er 5, eller $x^2 + y^2 + 3^2 = 5^2$, eller $x^2+y^2 = 4^2$.




C er altså en sirkel med radius 4 og sentrum i origo. Dette kan parametriseres med $\underline{\underline{c}(t) = (4\cos t, 4\sin t, 0)}$, $\underline{0 \leq t \leq 2\pi}$.

Med denne parametriseringen går vi fra $(4,0,0)$ (for $t=0$) til $(0,4,0)$ (for $t = \frac{\pi}{2}$), som er orienteringen vi ønsker.

b) Innsiden av S er en kule med radius 5, som dermed har volum $\text{Vol}(\text{kule}) = \frac{4}{3}\pi 5^3$.

T er den samme kula, men med delen under $xy$-planet kuttet av. S kan beskrives av

$$x^2+y^2+(z-3)^2 = 5^2, \quad \text{eller} \quad (z-3)^2 = 5^2 - x^2 - y^2.$$

Under $xy$-aksen er S dermed grafen til

$$z = f(x,y) = 3 - \sqrt{5^2-x^2-y^2}, \quad \text{på området}$$

$D$ = disken i $xy$-planet med senter i origo og radius 4.

Volumet som kuttes bort er dermed

$$\text{Vol}(\text{bort}) = -\iint_D f(x,y)\,dA = -\iint_D 3-\sqrt{5^2-x^2-y^2}\,dA$$

$$= \iint_D \sqrt{25-(x^2+y^2)}\,dA - 3\iint_D dA \qquad \text{Innfører polarkoordinater}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^4 \sqrt{25-r^2}\,r\,dr\,d\theta - 3\,\text{Areal}(D) \qquad \text{Substitusjon } u = 25-r^2, \quad du = -2r\,dr$$

$$= 2\pi \int_{25}^{9} \frac{1}{-2}\sqrt{u}\,du - 3\cdot\pi 4^2 = \pi \frac{2}{3} u^{3/2}\Big|_9^{25} - 3\pi 4^2$$

$$= \frac{2\pi}{3}(5^3-3^3) - 3\pi 4^2$$

Dermed blir volumet til T

$$\text{Vol}(T) = \text{Vol}(\text{kule}) - \text{Vol}(\text{bort}) = \frac{4}{3}\pi 5^3 - \left[\frac{2\pi}{3}(5^3-3^3) - 3\pi 4^2\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[2\cdot 5^3 + 2\cdot 3^3 + 3^2\cdot 4^2\right] = \frac{448\pi}{3}$$

c) $C$ er randen til $S^+$, og har riktig orientering, så Stokes setning forteller oss at

$$\iint_{S^+} \operatorname{curl} \underline{F} \cdot d\underline{S} = \int_C \underline{F} \cdot d\underline{s}$$

På $C$ er $x^2+y^2=16$ og $z=0$, så $\underline{F}=(0,0,x+y)$ der. Dermed har vi

$$\iint_{S^+} \operatorname{curl} \underline{F} \cdot d\underline{S} = \int_C \underline{F} \cdot d\underline{s} = \int_0^{2\pi} \underline{F}(\underline{c}(t)) \cdot \underline{c}'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (0, 0, 4\cos t + 4\sin t) \cdot (-4\sin t, 4\cos t, 0)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 0\,dt = \underline{\underline{0}}$$