REPETISJON

- noen sentrale begrep fra pensum i MA1103, vår 2009.

KAPITTEL 10

- Vektor; har størrelse og retning.
- Prikkprodukt av vektorer;
  $\vec{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_n], \vec{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$
  gir $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$.
- Bruk av prikkprodukt for å finne feks. lengden av en vektor, vinkelen mellom to vektorer, projeksjonen av en vektor ned på en annen osv. (I $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\cos\theta$. Alltid: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.)
- Kryssprodukt av vektorer;
  $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3], \vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ gir
  $$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = [u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1].$$
  NB! Alltid normalt på både $\vec{u}$ og $\vec{v}$.
- Bruk av kryssprodukt for å finne arealet av et parallellogram, normalvektor til et plan, skjæringslinje mellom to plan osv.
- Likning for et plan (flere varianter).
- Likning for ei linje (flere varianter).
- Likningene for noen typiske flater i rommet.

KAPITTEL 11

- Begrepet vektorfunksjon.
- En kurve i rommet beskrevet ved en vektorfunksjon;
  $\vec{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}$ (gir en possisjonsvektor for hvert valg av t).
- Parametrisering av kurver i rommet (fortrinnsvis skjæringskurver mellom forskjellige flater.)
- Enhetstangentvektor, enhetsnormalvektor og krumning til en kurve.
- Finne hastighetsvektor, fart og akselrasjonsvektor til en parametrisert kurve i rommet. (NB! Pass på når parameteren ikke er tid!)
- Buelengde; Lengden av en parametrisert kurve
  $\vec{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}$ fra $t = a$ til $t = b$ er gitt ved
  $\int_C ds = \int_a^b |\frac{d\vec{r}}{dt}|dt$.

KAPITTEL 12

- Funksjonsbegrepet i flere variable.
- Definisjonsmengde og verdimengde for en funksjon av flere variable.
- Grafen til en funksjon.
- Nivåkurver (i xy-planet!) til en funksjon av to variable, nivåflater (i rommet) til en funksjon av tre variable.
- Grensebegrepet for funksjoner av flere variable.
- Kontinuitet; (forsøke å) avgjøre om en funksjon av to variable er kontinuerlig i et punkt, feks ved gå mot punktet langs rette linjer, langs parabler, eller ved å gjøre om til polarkoordinater (evt. kulekoordinater).
- Definisjon av partiellderiverte, samt regneteknikk for å finne de. (NB! Kjerneregelen.)
- Bruk av partiell derivasjon til å finne tangentplan i et punkt; $z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}|_{(a,b)}(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}|_{(a,b)}(y - b)$.
- Høyere ordens partiellderiverte.
- Begrepet differensierbarhet.
- Begrepene gradientfunksjon og gradientvektor.
- Bruk av gradienten til blant annet å finne den deriverte i et punkt i en vilkårlig retning, og til å vurdere i hvilken retning funskjonsverdien forandrer seg hurtigst.

KAPITTEL 13

- Hva er et ekstrempunkt for en funskjon av flere variable?
- Hvordan finner vi ekstrempunkt og ekstremverdier for en funskjon av flere variable;
  - kritiske punkter
  - singulære punkter
  - randpunkter.
- Avgjøre om et kritisk punkt er et maksimumspunkt, et minimumspunkt eller et sadelpunkt (for eksempel ved bruk av Hessianmatrisa).
- Ekstremalverdier for funskjoner på begrensa områder/under gitte betingelser;
  - bruke restriksjonen til å komme fra en funskjon av n variable med begrensinger til en funksjon av $(n - 1)$ variable med nye begrensninger (innsetting eller parametrisering).
  - bruk av Lagranges multiplikatormetode.

KAPITTEL 14

- Dobbelintegralet som en Riemannsum.
- Dobbelintegralet som et iterert integral; finne integrasjonsgrensene for områdene vi integrere over (x-enkle og y-enkle områder).
- Dobbelintegralet i polarkoordinater;
  $dA = r\,dr\,d\theta$.
- Bytte av variable i dobbelintegralet; Jacobideterminanten;

$$dA = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = \left|\,\left|\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}\right|\,\right| dudv.$$

- Bruk av dobbelintegral for å finne areal; $A(D) = \iint_D dA$.
- Bruk av dobbelintegral for å finne volum; $V(R) = \iint_D h(x,y)$ dersom $h(x,y)$ er høydefunksjonen til legemet R over området D i xy-planet.
- Bruk av dobbelintegral for å finne gjennomsnittsverdien til en funksjon.
- Andre anvendelser av dobbelintegral.
- Trippelintegralet som en Riemannsum.
- Trippelintegralet som et iterert integral; finne grenser. (Tegn figur og bruk de likningene som beskriver området!)
- Bytte av variable i trippelintegral; spesielt bytte til syllinderkoordinater (r,θ,z), med $dV = r\,dr\,d\theta\,dz$ og kulekoordinater (ρ,ϕ,θ), med $dV = \rho^2\,sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$.
- Generell Jacobideterminant ved (trippel)- variabelbytte:
  $dV = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$.
- Bruk av trippelintegral for å finne volum; $V(R) = \iiint_R dV$.
- Bruk av trippelintegral for å finne masse og massesenter.
- Andre anvendelser av trippelintegral.

KAPITTEL 15

- Hva er et vektorfelt?
- Feltlinjer/integralkurver i et vektorfelt.
- Konservative felt;
  - definisjon ($\mathbb{F} = \nabla\phi$)
  - betingelse på de deriverte
  - hvordan finne en potensialfunksjon til et konservativt felt?
- Linjeintegral/kurveintegral;
  $\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))|\frac{d\vec{r}}{dt}|dt$.

- Linjeintegral av (tangentkomponenten til) et vektorfelt (arbeid); $W = \int_C \mathbb{F} \cdot \hat{T} ds$.
  - merk spesielt linjeintegral av et konservativt felt!
- Parametrisering av flater
  - merk spesielt parametrisering av en graf;
  $\begin{cases} x &= x \\ y &= y \\ z &= z(x, y). \end{cases}$
- Flateintegral
  - arealet av en flate: $A(S) = \iint_S dS$
  - flatedifferensialet dS når flaten er en graf:
  $dS = \sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 + 1}\, dA$
  - flatedifferensialet dS ved en generell parametrisering:
  $dS = |\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}|\, du\, dv$.
- Normalvektor til en flate:
  - generell graf: $N = [-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1]$.
  - generell parametrisert flate:
  $N = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$.
  - sylinder $x^2 + y^2 = a^2$: $\hat{N} = \frac{1}{a}\, [x, y, 0]$.
  - kule $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$: $\hat{N} = \frac{1}{a}\, [x, y, z]$.
- Fluksen ("gjennomstrømningen") til et vektorfelt gjennom en (orientert) flate (integralet av normalkomponenten til feltet gjennom flaten);
  fluks($\mathbb{F}$)= $\iint_S \mathbb{F} \cdot \hat{N} dS$.

KAPITTEL 16

- Divergensfunksjonen til et vektorfelt;
  div $(\mathbb{F}) = \nabla \cdot \mathbb{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$.

- Curlfeltet til et vektorfelt;
  curl $(\mathbb{F}) = \nabla \times \mathbb{F}$.
  - divergensen til et curlfelt er null.
  - curlen til et konservativt felt er null.
- Finne et vektorpotensiale for $\mathbb{F}$ dersom div $\mathbb{F} = 0$, dvs finne et vektorfelt $\mathbb{G}$ slik at $\mathbb{F} = \nabla \times \mathbb{G}$.
- Greens teorem i planet.
- Divergensteoremet i rommet/Gauss' teorem.
- Stokes teorem i rommet.