Kjapp Repetisjon:

KAPITTEL 10:

- Vektorregning , $\|\bar{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$
- Prikk-produkt ;

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = |\bar{u}|\,|\bar{v}| \cdot \cos\theta$$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 0 \iff \bar{u} \perp \bar{v}$$

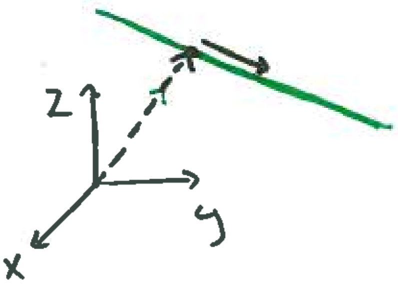
- Kryssprodukt ;

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = |\bar{u}|\,|\bar{v}| \cdot \sin\theta$$

= ± arealet av parallellogram utspent av $\bar{u}$ og $\bar{v}$

$\bar{u} \times \bar{v} \perp \bar{u}$ og $\bar{u} \times \bar{v} \perp \bar{v}$

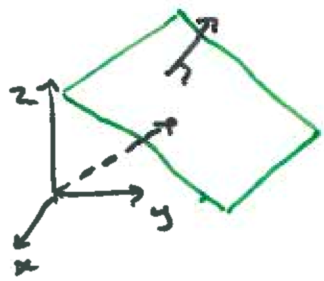
- Linjer i $\mathbb{R}^3$
  - $\bar{r} = \bar{r}_0 + t\,\bar{v}$
  - $\begin{cases} x = x_0 + t v_1 \\ y = y_0 + t v_2 \\ z = z_0 + t v_3 \end{cases}$
  - $\dfrac{x - x_0}{v_1} = \dfrac{y - y_0}{v_2} = \dfrac{z - z_0}{v_3}$



- Plan i $\mathbb{R}^3$
  - $\bar{n} = [A, B, C]$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$Ax + By + Cz = D$$



- Tegnetrening av linjer, plan og kvadratiske flater

KAPITTEL 11

- Vektorfunksjoner

$$\bar{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)] \quad , \quad a \leq t \leq b$$

  - parametriserer en kurve C i rommet
  - t = tid:
    - ~~fart~~ hastighet: $\bar{v}(t) = \frac{d}{dt}\bar{r}(t)$
    - akselrasjon: $\bar{a}(t) = \frac{d}{dt}\bar{v}(t) = \frac{d^2\bar{r}(t)}{dt^2}$

  - ofte: $\bar{r}(u) = [x(u), y(u), z(u)]$, $u = u(t)$, t = tid.

  Må bruke kjerneregel for å finne farten!

$$\bar{v} = \frac{d}{dt}\bar{r}(u) = \frac{d}{du}\bar{r}(u) \cdot \frac{du}{dt}$$

  Og kjerneregel + produktregel for å finne akselrasjonen!

$$\bar{a} = \frac{d}{dt}\bar{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{r}}{du} \cdot \frac{du}{dt}\right)$$

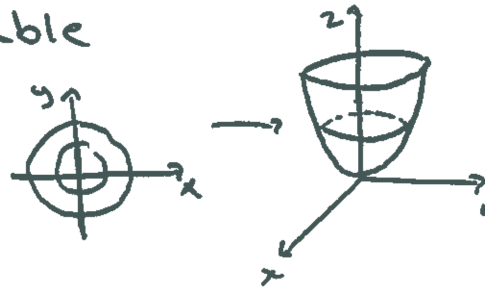
- Parametrisering av skjæringskurver
  - bruk de oppgitte likningene!
  - bruk cos t, sin t dersom det er noe sirkulært eller elliptisk

- Buelengde

$$s = \int_C ds = \int_a^b |\bar{v}(t)|\, dt = \int_a^b \left|\frac{d}{dt}\bar{r}(t)\right| dt$$

<u>KAP. 12</u>

* Funksjoner av flere variable
  - graf
  - nivåkurver / nivåflater



* Grenser og kontinuitet

  OBS! mange veier inn mot punktet

  - teste "enkle" veier;
    - x-aksen ($y \equiv 0$)
    - y-aksen ($x \equiv 0$)
    - linja $y = x$
    - parablene $y = x^2$, $x = y^2$

  - polarkoordinater; $x = r \cdot \cos\theta \; (+a)$
    $y = r \cdot \sin\theta \; (+b)$,

    se hva som skjer når $r \to 0$

  - bruke ε-δ-definisjonen

* Partiellderivert (av alle ordner)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$; stigning til tangent i x-retning

NB! Husk å bruke definisjonen på funksjoner med delt forskrift!

Tangentplan : $\bar{n} = [1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}|_{(a,b)}] \times [0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}|_{(a,b)}]$

likning : $z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(a,b)}(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(a,b)}(y-b)$

- kjerneregelen $f(x,y) = f(x(t), y(t))$:
$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

- differensierbarhet

- gradientvektor: $\nabla f(x,y) = [\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}]$
  - normalt på nivåkurven
  - angir retningen (ut fra et punkt) hvor funksjonen øker mest
  - maks. økning : $\|\nabla f(x,y)\|$

- retningsderivert :
$$D_{\hat{u}} = \nabla f(a,b) \cdot \hat{u} = \nabla f(a,b) \cdot \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$$

Kap. 13

* Ekstremalpunkt:
    - Kritiske punkt: $\nabla f(x,y) = \bar{0}$
    - Singulær punkt: $\nabla f(x,y)$ eksisterer ikke
    - Randpunkt

* Klassifisering av kritiske punkt:

$$\mathcal{H}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$ (anta symmetrisk)

- $\det \mathcal{H} > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$: bunnpunkt
- $\det \mathcal{H} > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$: toppunkt
- $\det \mathcal{H} < 0$: sadelpunkt

* Randpunkt:
    - Reduser problemet med én variabel (nye betingelser)
    - Parametriser randkurven (NB! endepunkt)
    - Lagranges metode: maks av $f(x,y)$ gitt $g(x,y) = c$:

$$\left.\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) &= c \end{aligned}\right\}$$