Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag, midtsemesterprøve MA1103, 2.mars 2010

Oppgave 1 Tegn figur og finn en parametrisering for skjæringskurven mellom flatene $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ og $(x-2)^2 + y^2 = 1$, for $z > 0$.

Løsningsforslag: Vi har en kule sentrert i origo med radius 3 og en sylinder med akse parallell med z-aksen gjennom $(2,0,0)$ og radius 1. For tegningens del kan det være verdt å merke seg at både sylinderen og kula passerer gjennom punktet $(3,0,0)$. Skjæringskurven passerer dermed også dette punktet.

Kurva kan parametriseres på mange måter, velger trigonomtriske funksjoner på grunn av sylinderen. Siden sentrum er forskjøvet til $(2,0)$ velges $x(t) = \cos t + 2$ og $y(t) = \sin t$. (Sjekk ut at dette passer i sylinderlikningen!) Bruker kulelikningen til å finne et utrykk for $z(t)$, merk at vi er interessert i positiv z-komponent: $z(t) = \sqrt{9 - x^2(t) - y^2(t)} = \sqrt{9 - (\cos t + 2)^2 - (\sin t)^2} = \sqrt{4 - 4\cos t} = 2\sqrt{1 - \cos t}$. Parametriseringen blir dermed som følger:

$$\mathbf{r}(t) = [\cos t + 2, \sin t, 2\sqrt{1 - \cos t}]$$

Intervallet for parameteren kan velges til $t \in [0, 2\pi]$.

Kommentar: En parametrisering av en kurve i rommet skal være på formen $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$, altså en vektorfunksjon med tre komponentfunksjoner (eventuelt satt opp som tre komponentfunksjoner). En likning er ikke en paramterisering. Intervallet for parameteren skal også spesifiseres.

Oppgave 2 Avgjør om grenseverdien

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{x^4 + y^2}}$$

eksisterer.

Løsningsforslag: Tester noen enkle veier inn mot origo:

$$x = 0 : \lim_{(0,y)\to(0,0^+)} f(0,y) = \lim_{y\to 0^+} \frac{0}{\sqrt{y^2}} = 0$$

$$y = x^2 : \lim_{(x,x^2)\to(0,0)} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\pm x^2}{\sqrt{x^4 + x^4}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$$

Siden vi får ulike verdier langs ulike veier, er konklusjonen at grenseverdien ikke eksisterer.

Kommentar: Man kan selvsagt forsøke seg med polarkoordinater her. Da får vi et utrykk med vinkelen θ i nevner. Grenseverdien viser seg å ikke være uavhengig av θ.

Oppgave 3 Anta at $T(x,y) = 10 - 2x^2 - 3y^2$ gir en temperaturfordeling i xy-planet.

a) Finn gradientvektoren til T i punktet $(1,2)$, og regn ut den retningsderiverte til T i punktet $(1,2)$ i retningen gitt ved $\mathbf{v} = [3,1]$.

Løsningsforslag: Gradientvektoren til T er gitt ved $\nabla T(x,y) = [T_1(x,y), T_2(x,y)] = [-4x, -6y]$. I punktet $(1,2)$ blir derfor gradientvektoren $\nabla T(1,2) = [-4, -12]$.

For å finne den retningsderiverte i retning $\mathbf{v}$, trenger vi en enhetsvektor i denne retningen. Den er gitt ved $\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{[3,1]}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}[3,1]$. Da er den retningsderiverte av T i retning $\hat{\mathbf{v}}$ gjennom $(1,2)$ gitt ved $D_{\hat{\mathbf{v}}}T(1,2) = \nabla T(1,2) \cdot \hat{\mathbf{v}} = [-4,-12] \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}[3,1] = -\frac{24}{\sqrt{10}}$.

b) En varmesøkende partikkel er lokalisert i punktet $(1,2)$. Partikkelen beveger seg fra $(1,2)$ langs en kurve $\mathcal{C}$ der temperaturen øker raskest mulig. Finn kurven $\mathcal{C}$ ved en parameterfremstilling eller på formen $y = f(x)$.

Løsningsforslag: Gradientvektoren $\nabla T(x,y)$ peker til enhver tid i den retningen temperaturen øker raskest. Den varmesøkende partikkelen vil derfor bevege seg langs en kurve som har $\nabla T(x,y)$ som en tangentvektor. Hvis $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t)]$ er en parametrisering av kurven, må vi dermed ha $\mathbf{r}'(t) = [x'(t), y'(t)] = \lambda_t \nabla T(x(t), y(t))$, siden den deriverte $\mathbf{r}'(t)$ også er en tangent til kurven.

Dette gir $x'(t) = \lambda_t(-4x(t))$ og $y'(t) = \lambda_t(-6y(t))$. Her kan vi velge å sette $\lambda_t \equiv 1$ og løse to separable differensiallikniger;

$$\frac{dx}{dt} = -4x \Rightarrow \int \frac{1}{x}\,dx = \int -4\,dt \Rightarrow \ln|x| = -4t + C_1 \Rightarrow x(t) = C_2 e^{-4t}$$

$$\frac{dy}{dt} = -6y \Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int -6\,dt \Rightarrow \ln|y| = -6t + K_1 \Rightarrow y(t) = K_2 e^{-6t}$$

Vi bestemmer C_2 og K_2 for eksempel ved å kreve at kurven skal passere $(1,2)$ for $t = 0$, noe som gir $C_2 = 1$ og $K_2 = 2$. Kurven kan derfor parametriserers ved $\mathbf{r}(t) = [e^{-4t}, 2e^{-6t}]$, for $t \geq 0$.

Alternativt kan vi samle de to differenasiallikningene til en ved å bruke kjernereglen for derivasjon; $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$ (betrakter da $y = y(x(t))$, noe som ikke nødvendigvis er mulig overalt, da det ikke er sikkert at kurven kan skrives som en funksjon $y = y(x)$, men vi kan gjøre det lokalt overalt hvor kurven ikke er vertikal.)

Da får vi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\lambda_t(-6y)}{\lambda_t(-4x)} = \frac{3y}{2x} \Rightarrow \int \frac{2}{y}\,dy = \int \frac{3}{x}\,dx \Rightarrow$$

$$2\ln|y| = 3\ln|x| + C_1 \Rightarrow y^2 = C_2x^3 \Rightarrow y(x) = \pm\sqrt{C_2x^3}$$

Bestemmer fortegn og konstanten C_2 ved å kreve at kurven passerer punktet $(1,2)$, og finner $2 = \sqrt{C_2} \Rightarrow C_2 = 4$. Kurven blir dermed $y(x) = 2x^{\frac{3}{2}}$

Vi kan kontrollere at de to ulike representasjonene stemmer overens ved å se om $y(t) = 2(x(t))^{\frac{3}{2}}$. Setter inn og ser at $2(x(t))^{\frac{3}{2}} = 2(e^{-4t})^{\frac{3}{2}} = 2e^{-6t} = y(t)$, så det stemmer bra!

Oppgave 4 La $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

a) Finn eventuelle kritiske punkt for f.

Løsningsforslag: Kritiske punkt finner vi der begge de partiellderiverte er null.

$$1)\ \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \Leftrightarrow x^2 = y$$

$$2)\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow y^2 = x$$

Setter vi 1) inn i 2) får vi $x^4 = x$ som har løsning $x = 0$ og $x = 1$. De kritiske punktene er derfor $(0,0)$ og $(1,1)$.

b) Klassifiser eventuelle kritiske punkt for f.

Løsningsforslag: Vi bruker Hessianmatrisa for å klassifisere (annenderiverttesten):

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}$$

$$(0,0): \; H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \; det(H) < 0 \Rightarrow (0,0) \text{ er et sadelpunkt.}$$

$$(1,1): \; H(1,1) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \; det(H) > 0, A = 6 > 0 \Rightarrow (1,1) \text{ er et lokalt bunnpunkt.}$$

Oppgave 5

Finn den minimale avstanden fra origo til et punkt på flaten $xy + 3xz = 5\sqrt{5}$.

Løsningsforslag: Avstandsfunksjonen fra origo til et tilfeldig punkt i rommet er gitt ved $d(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Vi skal minimere denne under tileggsbetingelsen $xy + 3xz = 5\sqrt{5}$. Velger å minimere $f(x,y,z) = d^2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ for enklere regning. Merk at f og d har de samme minimumspunktene (men med ulik minimumsverdi).

Velger å bruke Lagranges metode. Setter $g(x,y,z) = xy + 3xz$ Må da løse likningssystemet $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$, $g(x,y,z) = 5\sqrt{5}$.

$$\begin{array}{lccc} 1) & 2x & = & \lambda(y+3z) \\ 2) & 2y & = & \lambda\, x \\ 3) & 2z & = & \lambda\, 3x \\ 4) & xy + 3xz & = & 5\sqrt{5} \end{array}$$

Setter 2) og 3) inn i 1) og får $2x = \lambda(\frac{\lambda}{2}x + \frac{9\lambda}{2}x) = 5x\lambda^2 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Setter 2) og 3) inn i 4), setter til slutt inn verdien for λ og får $x(\frac{\lambda}{2}x) + 3x(\frac{3\lambda}{2}x) = 5\sqrt{5} \Rightarrow 5x^2\lambda = 5\sqrt{5} \Rightarrow x^2 = \frac{\sqrt{5}}{\lambda}$. Ser nå at bare den positive verdien for λ passer i denne likningen, setter inn og finner $x^2 = \frac{5}{\sqrt{2}}$. Kan nå løse ut for x, men siden avstandsfunksjonen inneholder x^2, er det godt nok for oss. Finner $y^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ og $z^2 = \frac{9}{2\sqrt{2}}$ fra hhv. likning 2) og 3). Dermed blir den aktuelle avstanden $d = \sqrt{5\sqrt{2}}$.

Siden flaten $xy+3xz = 5\sqrt{5}$ har punkter som ligger uendelig langt unna origo (velg feks. $z = 0$, som gir hyperbelen $y = \frac{5\sqrt{5}}{x}$ i xy-planet), må avstanden vi fant være en minimumsavstand og ikke en maksimumsavstand.

Kommentar: Oppgaven kan også løses ved å bruke tileggsbetingelsen til å redusere avstandsfunksjonen til en funksjon av to variable og minimere denne.

Oppgave 6

Beregn dobbeltintegralet $\iint_D x^2 + 2y\,dA$, der D er trekanten i xy-planet med hjørner $(1, 0)$, $(3, 0)$ og $(3, 4)$.

Løsningsforslag: Hypotenusen i trekanten har stigningstall 2. Linja som hypotenusen er en del av skjærer dermed y-aksen i $y = -2$, og har likning $y = 2x - 2$. Kan velge grensene $1 \leq x \leq 3$ og $0 \leq y \leq 2x - 2$.

$$\iint_D x^2+2y\,dA = \int_{x=1}^{3}(\int_{y=0}^{2x-2} x^2+2y\,dy)\,dx = \int_1^3 [x^2y+y^2]_0^{2x-2}\,dx = \int_1^3 2x^3-2x^2+4x^2-8x+4\,dx = \frac{100}{3}$$