2005

Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Midtsemesterprøve i fag MA1103 Flerdimensjonal analyse

Oppgave 1

Funksjonen f er gitt ved $f(x,y) = x^2 + 3xy$. Finn likningen for tangentplanet til grafen til f i punktet $(1,1,4)$.

Løsning:

Vi finner de partiellderiverte i punktet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x + 3y, \quad && \text{så } \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2 + 3 = 5 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3x, && \text{så } \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 3 \end{aligned}$$

Dermed blir likningen for tangentplanet:

$$\begin{aligned} z &= 4 + 5(x-1) + 3(y-1) \\ &= 5x + 3y - 4 \end{aligned}$$

Oppgave 2

Gitt funksjonen $f(x,y) = xe^{-2(x^2+y^2)}$

a) Finn eventuelle kritiske punktene til f.

b) Bestem maksimumsverdien og minimumsverdien til f på området gitt ved $x^2 + y^2 \leq 1$.

Løsning:

a) Kritisk punkt har vi der gradientvektoren til f er null. Gradientvektoren til f:

$$\nabla f = [(1-4x^2)e^{-2(x^2+y^2)}, -4xye^{-2(x^2+y^2)}]$$

Denne er null når $(1-4x^2) = 0 \wedge -4xy = 0$, dvs. vi har kritiske punkt i $(\frac{1}{2}, 0)$ og $(-\frac{1}{2}, 0)$.

b) Vi kan ha maksimums- og minimumsverdi i kritiske punkt, singulære punkt og i randpunkt. Funksjonen har ingen singulære punkt. De kritiske punkta fant vi i a). Vi undersøker derfor f i randpunkta til området; $x^2 + y^2 = 1$. Det kan vi gjøre på flere ulike måter. Velger å parametrisere randa; ved å sette $x = \cos t$ og $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$g(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos t\ e^{-2}$$

Ser lett(?) at maksimumsverdien til g er e^{-2} $(t = 0, t = 2\pi)$, mens minimumsverdien er $-e^{-2}$ $(t = \pi)$. (Kan også finne dette ved å derivere g.) Sammenlikner disse verdiene med verdiene i de kritiske punkta vi fant i a). $f(\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$, $f(-\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$.
Konkluderer med at maks.verdien er $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ og min. verdien er $-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$.

Oppgave 3

La f være funksjonen gitt ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2} & \text{hvis } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{hvis } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Avgjør om f er kontinuerlig i $(0, 0)$.

b) Bestem de partiellderiverte av første orden i punktet $(0, 0)$ dersom de eksisterer.

Løsning:

a) Vi må undersøke om $lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ er 0. Vi sjekker noen av de lette veiene inn mot punktet $(0, 0)$, og håper vi kan trekke en konklusjon ut fra det:

$$\text{Langs } y-\text{aksen: } f(0,y) = 0, \text{ så } \lim_{(0,y)\to(0,0)} f(0,y) = 0.$$

$$\text{Langs } x-\text{aksen: } f(x,0) = \frac{1}{x}, \text{ så } \lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0) = \pm\infty.$$

Vi konkluderer med at f ikke er kontinuerlig i $(0,0)$.

b) Her må vi bruke definisjonen av de partiellderiverte:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) : \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2} = \infty$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) : \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Konklusjon: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ eksisterer ikke, mens $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Oppgave 4

Romfarer Rolf har problem med fartøyet sitt. Temperaturen på overflaten av romskipet i punktet (x, y, z) er gitt ved

$$T(x,y,z) = \frac{1}{20}\ln(y^2+z^2+8) + \frac{1}{100}x^2y,$$

der x, y og z måles i kilometer og temperaturen i grader Celsius. Akkurat nå befinner han seg i punktet $(1, 1, 1)$.

a) I hvilken retning bør han styre skipet for at temperaturen skal avta raskest mulig?

b) Hvis han kjører i 10 km/s i denne retningen, hvor hurtig avtar temperaturen?

Løsning:

a) For å finne ut i hvilken retning Rolf bør kjøre, må vi regne ut gradientvektoren i punktet $(1, 1, 1)$:

$$\nabla T(x,y,z) = [\frac{2}{100}xy, \frac{1}{20}\frac{2y}{y^2+z^2+8} + \frac{1}{100}x, \frac{1}{20}\frac{2z}{y^2+z^2+8}]$$
$$\nabla T(1,1,1) = [\frac{2}{100}, \frac{2}{100}, \frac{1}{100}] = \frac{1}{100}[2,2,1]$$

Temperaturen øker mest i retning $\nabla T(1,1,1)$ og avtar mest i retning $-\nabla T(1,1,1)$. Dermed bør Rolf kjøre i retning $-[2,2,1]$.

b) Forandringen i temperatur pr. kilometer i denne retningen er lengden av gradientvektorern; altså $|\pm\nabla T(1,1,1)| = \frac{1}{100}\sqrt{2^2+2^2+1} = \frac{3}{100}$ grader pr kilometer. Siden Rolf kjører i 10km/s opplever han en temeraturforandring på $\frac{3}{100}\cdot 10 = \frac{3}{10}$ grader pr sekund.