NTNU
Norwegian University of
Science and Technology

Department of Mathematical Sciences

Examination paper for **MA1102 Grunnkurs i analyse II**

Academic contact during examination: Eduard Ortega

Phone: 46760087

Examination date: 18 August 2023

Examination time (from–to): 09:00–13:00

Permitted examination support material: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Other information:

- Alle 7 oppgaver teller likt ved karaktersetting.
- Lykke til!

Language: English

Number of pages: 3

Number of pages enclosed: 1

Checked by:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☒	

Date Signature

Problem 1 Hvilke av følgende utsagn er korrekte? Svar med *Sann* eller *Usann*. Begrunnelse trengs ikke på denne oppgaven.

1. Mengden
$$A = (0,1) \cap \mathbb{Q}$$
er en kompakt delmengde av $\mathbb{R}$.
2. Mengden $B = \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{N}\}$ er tellbar.
3. Følgen $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ er Cauchy.
4. $\left\{\left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ er en åpen overdekning av $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
5. La $(K_i)_{i=1}^{\infty}$ være en uendelig familie av begrenset delmengder av $\mathbb{R}$. Da $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ er alltid en begrenset delmengde av $\mathbb{R}$.
6. Supremum av delmengden $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ av $\mathbb{R}$ er $\sqrt{2}$.
7. For ethvert kontinuerlig funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og ethvert begrenset følge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$følgen $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ er begrenset.
8. For ethvert kontinuerlig funksjon $f : [0,1] \to [0,1]$ det finnes et punkt $a \in [0,1]$ slik at $f(a) = a$.
9. For ethvert kontinuerlig funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og ethvert begrenset delmengden A av $\mathbb{R}$, $f^{-1}(A) := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in A\}$ er en begrenset delmengden av $\mathbb{R}$.
10. $\mathbb{Q}$ er en lukket delmengden av $\mathbb{R}$.

Problem 2

1. La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være en absolutt konvergent rekke. Vis at summen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ er absolutt konvergent. Begrunn ditt svar.
2. La $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ være en følge av $\mathbb{R}$ slik at $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 1$. Vis at summen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent. Begrenn ditt svar.
3. Rekken $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ er
   a) divergent, eller
   b) betinget konvergent, eller

c) absolutt konvergent.

Begrunn ditt svar.

4. Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ er

   a) divergent, eller
   b) betinget konvergent, eller
   c) absolutt konvergent.

   Begrunn ditt svar.

5. Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ er

   a) divergent, eller
   b) betinget konvergent, eller
   c) absolutt konvergent.

   Begrunn ditt svar.

Problem 3 Finn alle komplekse tall som tilfredstiller ligningen $z^5 = -i$.

Problem 4 La $f_n(x) = x^{\frac{2n}{n+1}}$. Bestem funksjonen $f(x)$ slik at følgen $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerer punktvis mot $f(x)$ på intervallet $I = [0, 1]$. Konvergerer $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uniformt mot $f(x)$ på intervallet $I = [0, 1]$? Begrunn ditt svar.

Problem 5 Finn potensrekker av formen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ av de følgende funksjonene. Bestem konvergensradien og konvergensområde også.

1. $f(x) = \arctan(2x)$ med $a = 0$.
2. $f(x) = \ln(x)$ med $a = 1$.
3. $f(x) = \cos(2x^2)$ med $a = 0$.

Problem 6 La $y(x)$ være løsningen av

$$y' = xy^2 \qquad \text{med} \qquad y(0) = 1\,.$$

Bruk Eulers metode med $h = 0.1$ til å approksimere verdien av $y(x)$ i punktene

$$x_1 = 0.1\,, \qquad x_2 = 0.2 \qquad \text{og} \qquad x_3 = 0.3\,.$$

(Bruk kun 4 desimaler i utregningene dine.).

Problem 7

1. Finn løsningen av differensiallignigen med initialbetingelser

$$\begin{cases} y'' - 4y' - 5y = \sin(2x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

2. Finn potensrekkeløsningen $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ av differensiallignigen med initialbetingelser

$$\begin{cases} xy'' - y' + 4x^3 y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

Numeriske metoder

- Newtons metode: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
- Eulers metode: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$
- Eulers midpunktsmetode: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n))$.

Taylorrekker

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad -1 < x < 1\,.$$

Eulers formel

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$