Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1102/6102 Grunnkurs i analyse II**

Faglig kontakt under eksamen: Eduard Ortega

Tlf: 46760087

Eksamensdato: August 2018

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:

- Alle svar må begrunnes og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd.
- Alle 10 deloppgaver teller likt ved karaktersetting.
- Lykke til!

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 2

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 La $\mathcal{E}$ være ellipsen med brennpunkter $\mathcal{B}_1 = (0,0)$ og $\mathcal{B}_2 = (4,0)$ og der summen av avstandene fra et punkt $\mathcal{P}$ på ellipsen til $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ er konstant og lik 8. Finn sentrum og halvaksene, og gi likningen til $\mathcal{E}$ på standardform.

Oppgave 2 En parametrisk kurve er gitt på formen

$$\vec{r}(t) = \Big(\sin(t^2 - t), \cos(t^2 - t)\Big) \qquad t \geq 0\,.$$

Finn hastigheten $\vec{v}$, farten v, akselerasjonen $\vec{a}$ og baneakselerasjonen a til kurven $\vec{r}$.

Finn buelengden til kurven fra $t = 0$ til $t = 1$.

Oppgave 3 La $f(x) = x^6 - x^5 - 2$. Finn minste antall delintervall slik at approksimasjonsfeilen når vi utfører Simpsons metode for integralet

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

er mindre enn 10^{-2}.

Oppgave 4 Skriv det komplekse tallet $z = 1 + i$ på polarform $re^{i\theta}$, og bruk dette til å finne $(1+i)^{100}$.

Oppgave 5 La $y(x)$ være løsningen av

$$y' = xy^2 \qquad \text{med} \qquad y(0) = 1\,.$$

Bruk Eulers midtpunktsmetode med $h = 0.1$ til å approksimere verdien av $y(x)$ i punktene

$$x_1 = 0.1 \qquad \text{og} \qquad x_2 = 0.2\,.$$

(Bruk kun 4 desimaler i utregningene dine.)

Oppgave 6

a) Finn løsningen av differensiallikningen

$$y'' - 4y' - 5y = \cos(2x)$$

med initialbetingelser $y(0) = 0$ og $y'(0) = 0$.

b) Finn potensrekkeløsningen $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ av differensiallikningen

$$y'' + 2xy' + 2y = 0\,,$$

for $x \in \mathbb{R}$, med initialbetingelser $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$.

Oppgave 7

a) Finn konvergensområdene til potensrekkene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!4^n}(x-1)^n \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3n+2} x^n\,.$$

b) Finn summen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}\,.$$

Hint: Bruk Taylorrekka til $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Oppgave 8 La $f_n(x) = x^{2n+1}$ være definert på intervallet $I = [-1, 1]$. Bestem funksjonen $f(x)$ slik at følgen $\{f_n(x)\}$ konvergerer punktvis mot $f(x)$. Konvergerer $\{f_n(x)\}$ uniformt mot $f(x)$?

Numeriske metoder

- Newtons metode: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
- Simpsons metode: $\int_a^b f(x)\,dx \approx S_{2n} := \frac{h}{3}\Big[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + 2f_{2n-2} + 4f_{2n-1} + f_{2n}\Big]$ der $f_i = f(x_i)$.
  Hvis f har kontinuerlig fjerdederivert på $[a,b]$, så har vi
  $$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_{2n}\right| = \frac{(b-a)^5}{2880n^4}|f^{(4)}(c)| \qquad \text{hvor } c \in [a,b]$$
- Eulers metode: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$
- Eulers midtpunktsmetode: $y_n = y_{n-1} + hf(x'_{n-1}, y'_{n-1})$
  der $(x'_{n-1}, y'_{n-1}) = (x_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{n-1} + \frac{h}{2}f(x_{n-1}, y_{n-1}))$.

Taylorrekker

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad -1 < x < 1\,.$$

Taylors formel med restledd

$$f(x) = T_n f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

der c er et tall i det åpne intervallet mellom a og x.

Eulers formel

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

Kjeglesnitt

Ligning for kjeglesnitt med eksentrisitet $\varepsilon \neq 1$ (dvs. ellipse eller hyperbel), *styre-linje* $x = L$ og *brennpunkt* i $(B, 0)$ (med $B > L$):

$$y^2 = (\varepsilon^2 - 1)((x - \bar{x})^2 - a^2)\,,$$

der $\bar{x} = \frac{B - \varepsilon^2 L}{1 - \varepsilon^2}$ er *sentrum* i kjeglesnitt og $a^2 = (\frac{\varepsilon(B-L)}{1-\varepsilon^2})^2$.

For $\varepsilon = 1$ (parabel) har vi

$$y^2 = 2(B - L)x + L^2 - B^2\,.$$