NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

# Eksamensoppgave i **MA1102/6102 Grunnkurs i analyse II**

**Faglig kontakt under eksamen:** Eduard Ortega

**Tlf:** 46760087

**Eksamensdato:** august 2019

**Eksamenstid (fra–til):** 09:00–13:00

**Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler:** D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

**Annen informasjon:**

- Alle svar må begrunnes og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd.
- Alle 8 oppgaver teller likt ved karaktersetting.
- Lykke til!

**Målform/språk:** bokmål

**Antall sider:** 2

**Antall sider vedlegg:** 1

**Kontrollert av:**

| **Informasjon om trykking av eksamensoppgave** | |
|---|---|
| **Originalen er:** | |
| **1-sidig** ☐ | **2-sidig** ☒ |
| **sort/hvit** ☒ | **farger** ☐ |
| **skal ha flervalgskjema** ☐ | |

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

**Oppgave 1** La $\mathcal{E}$ være hyperbelen med brennpunkter $\mathcal{B}_1 = (4, 0)$ og $\mathcal{B}_2 = (-4, 0)$ og der differensen av avstandene fra et punkt $\mathcal{P}$ på hyperbelen til $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ er lik 4 eller $-4$.

**a)** Gi likningen til $\mathcal{E}$.

**b)** Finn en parametrisert kurve som går over venstre delen av $\mathcal{E}$.

**Oppgave 2** Avgjør om rekkene konvergerer eller divergerer.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10} 2^n}{\sqrt{n!}} \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}\,.$$

**Oppgave 3** La $f(x) = \ln((1 + x^2)^{9/8})$. Finn Maclaurinrekken til $f(x)$ og konvergensområdet.

**Oppgave 4** Finn alle komplekse tall $z$ som tilfredsstiller

$$z^5 = 3i\,.$$

**Oppgave 5** Vis at differensiallikningen

$$\frac{1}{x}\mathrm{d}y - \frac{y}{x^2}\mathrm{d}x = 0$$

er eksakt og løs ligningen.

**Oppgave 6**

**a)** Finn løsningen av differensiallikningen

$$y'' + 8y' + 16y = 0\,.$$

**b)** Finn løsningen av differensiallikningen

$$y'' + 8y' + 16y = e^{-4x}\,.$$

**Oppgave 7** La $f_n(x) = \frac{nx^2+1}{nx+1}$ være definert på intervallet $I = [1, 2]$. Bestem funksjonen $f(x)$ slik at følgen $\{f_n(x)\}$ konvergerer punktvis mot $f(x)$. Bevis at $\{f_n(x)\}$ konvergerer også uniformt mot $f(x)$.

**Oppgave 8** Funksjonen $f(x) = x^3 + 2x - 1$ har nøyaktig ett nullpunkt på intervallet $[0, 1]$. Gjør 3 iterasjoner av Newtons metode for å finne en tilnærmet verdi for nullpunktet. Sett $x_0 = 0$ og bruk kun 4 desimaler i beregningene dine.

# Numeriske metoder

- Newtons metode: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
- Eulers metode: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$
- forbedret Eulers metode: $y_{n+1} = y_n + h\frac{f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},u_{n+1})}{2}$
  der $x_{n+1} = x_n + h$, og $u_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$.

# Maclaurinrekker

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad -1 < x < 1\,.$$

# Eulers formel

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$