Oppgave 1

Finn hastighetsvektoren, farten, og baneakselerasjonen til kurven

$$\overrightarrow{r(t)} = (\cos(t^2), \sin(t^2)) \qquad t \geq 0\,.$$

Merk: $\cos(t^2)$ *og* $\sin(t^2)$, *ikke* $\cos^2(t)$ *og* $\sin^2(t)$

Løsning

$$\text{(Hastighet)} \qquad \overrightarrow{v(t)} = (-2t\sin(t^2), 2t\cos(t^2)) \qquad t \geq 0\,.$$

$$\text{(Farten)} \qquad v(t) = \|\overrightarrow{v(t)}\| = \sqrt{4t^2\sin^2(t^2) + 4t^2\cos^2(t^2)} = 2t \qquad t \geq 0\,.$$

$$\text{(Baneakselerasjonen)} \qquad a(t) = v'(t) = 2 \qquad t \geq 0\,.$$

Oppgave 2

La $f(x) = e^{-x^2}$. Finn integralet

$$\int_1^2 f(x)\,dx$$

numerisk ved å bruke Simpsons metode slik at approksimasjonsfeilen er mindre enn 10^{-3}. Bruk 4 desimaler i utregningene.

Hint: Bruk uten bevis at maksimalverdien til $|f^{(4)}(x)|$ på intervallet $[1, 2]$ kan begrenses av 8.

Løsning

Approksimasjonsfeilen er

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_{2n}\right| = \frac{(b-a)^5}{2880n^4}|f^{(4)}(c)| \leq \frac{(2-1)^5}{2880n^4}8 < 10^{-3}$$

Så

$$\frac{(2-1)^5}{2880n^4}8 < 10^{-3} \Longrightarrow \frac{8000}{2880} < n^4 \Longrightarrow 2,7778 < n^4 \Longrightarrow 1,2091 < n\,.$$

Vi velger $n = 2$, og derfor $h = 2 - 1/4 = 1/4$.

$$\begin{aligned}
S_4 &= \frac{1/4}{3}\left(f(1) + 4f(5/4) + 2f(6/4) + 4f(7/4) + f(2)\right) \\
&= 0.0833(0.3679 + 4 * 0.2096 + 2 * 0.1054 + 4 * 0.0468 + 0.0183) \\
&= 0.0833(0.3679 + 0.8384 + 0.2108 + +0.1872 + 0.0183) = 0.1352
\end{aligned}$$

Oppgave 3

Gjør 3 iterasjoner av Newtons metode med startpunkt $x_0 = 0$ for å finne nullpunktet til funksjonen $f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$. Bruk 4 desimaler i utregningene.

Løsning

La

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{2x^3 + x^2 + x - 1}{6x^2 + 2x + 1}\,.$$

Da

$$x_0 = 0 \Longrightarrow x_1 = g(0) = 1 \Longrightarrow x_2 = g(1) = 1 - 3/9 = 2/3 = 0.6667$$

$$\Longrightarrow x_3 = g(0.6667) = 0,6667 - \frac{0.5926 + 0.4444 + 0.6667 - 1}{2.6667 + 1.3333 + 1} = 0,6667 - \frac{0.7037}{5} = 0.5260$$

Oppgave 4

Vis at andregradslikningen $\lambda x^2 - y^2 + x - \lambda = 0$ definerer en hyperbel for $\lambda > 0$. Finn eksentrisiteten og sentrum til hyperbelen uttrykt ved λ.

Løsning

$$\lambda x^2 - y^2 + x - \lambda = 0 \Longrightarrow y^2 = \lambda x^2 + x - \lambda = \lambda(x^2 + \frac{1}{\lambda}x - 1) = \lambda\left(\left(x + \frac{1}{2\lambda}\right)^2 - \frac{1}{4\lambda^2} - 1\right)\,.$$

Derfor

$$\lambda = \varepsilon^2 - 1 \Longrightarrow \varepsilon = \sqrt{\lambda + 1}\,,$$

$$\bar{x} = -\frac{1}{2\lambda}\,.$$

Så $\varepsilon > 1$ hvis og bare hvis $\lambda > 0$. Dersom $\varepsilon > 1$ er kjeglesnitt en hyperbel.

Oppgave 5

(a) Finn løsningen av differensiallikningen

$$y'' - 2y' + y = 0$$

med initialbetingelser $y(0) = 2$ og $y'(0) = 1$.

(b) Finn løsningen av differensiallikningen

$$y'' - 2y' + y = e^{2x}$$

med initialbetingelser $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$.

(c) Finn potensrekkeløsningen $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ av differensiallikningen

$$x^2 y'' + y' - 2y = 0\,,$$

for $x \in \mathbb{R}$.

Løsning

(a) Karakteristisk ligning er

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0\,,$$

som har en enkel rot $\lambda = 1$. Derfor løsning er på formen

$$y = e^x (Ax + B)\,.$$

Initialbetingelse

$$y(0) = B = 2$$

$$y'(x) = e^x(Ax + B) + e^x(A) \Longrightarrow y'(0) = 2 + A = 1 \Longrightarrow A = -1\,.$$

(b) Løsningene er på formen

$$y = y_p + e^x(Ax + B)\,,$$

og vi må finne en bestemt løsning y_p. Vi forsøker $y_p = Ce^{2x}$, så

$$(Ce^{2x})'' - 2(Ce^{2x})' + Ce^{2x} = Ce^{2x}(4 - 4 + 1) = Ce^{2x} = e^{2x} \Longrightarrow C = 1\,.$$

Derfor

$$y = e^{2x} + e^x(Ax + B)\,.$$

Initialbetingelse

$$y(0) = 1 + B = 1 \Longrightarrow B = 0\,,$$

$$y'(x) = 2e^{2x} + e^x(Ax + B) + e^x(A) \Longrightarrow y'(0) = 2 + A = 0 \Longrightarrow A = -2\,.$$

(c) Vi har

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Longrightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Longrightarrow y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2}\,.$$

Så

$$x^2(\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)na_nx^{n-2}) + \sum_{n=0}^{\infty} na_nx^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_nx^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_nx^n = 0$$

$$a_1 - 2a_0 + (2a_2 - 2a_1)x + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_nx^n + \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} 2a_nx^n = 0$$

Derfor

$$a_1 - 2a_0 = 0 \Longrightarrow a_1 = 2a_0$$

$$2a_2 - 2a_1 \Longrightarrow a_2 = a_1 = 2a_0$$

$$(n-1)na_n + (n+1)a_{n+1} - 2a_n = 0 \Longrightarrow a_{n+1} = \frac{n^2-n-2}{n+1}a_n = (n-2)a_n$$

Så $a_3 = (2-2)a_2 = 0$, og derfor $a_n = 0$ for $n \geq 2$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = a_0 + 2a_0x + 2a_0x^2\,.$$

Oppgave 6

(a) Finn Taylor-rekken til funksjonen $f(x) = \ln(1+x^2)$ om punktet $a = 0$ og dens konvergensområde. Bruk dette til å finne summen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}(n+1)}\,.$$

(b) Finn konvergensområdene til potensrekkene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}x^{n+1} \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{nx}{2+3n}\right)^n\,.$$

Løsning

Vi vet at

$$g(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{for } 1 < |x| < 1$$

$$h(x) = g(-x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad \text{for } 1 < |x| < 1$$

$$q(x) = \int_0^x h(t)dt = \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} \qquad \text{for } 1 < |x| \leq 1$$

og endelig

$$f(x) = q(x^2) = \ln(1 + x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{2n+2} \qquad \text{for } 1 < |x| \leq 1$$

Derfor

$$f(1/2) = \ln(1 + 1/4) = \ln(5/4) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (1/2)^{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (1/4)^{n+1} .$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} |x| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)n} |x| = |x| < 1 ,$$

så konvergensradien er lik 1. Vi må sjekke endepunkter 1 og -1, men rekkene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} (-1)^{n+1}$$

er divergente. Så konvergensområdet er $(-1, 1)$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2+3n}\right)^n} |x| = \frac{1}{3} |x| ,$$

så konvergensradien er $1/3$. Vi må sjekke endepunkter 3 og -3,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n3}{2+3n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\frac{2}{3n}+1}\right)^n$$

og

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-n3}{2+3n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\frac{2}{3n}+1}\right)^n$$

Men

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{2}{3n}+1}\right)^n = e^{2/3} ,$$

så begge rekkene divergerer.

Oppgave 7

La $f_n(x) = xe^{-nx}$ være definert på intervallet $I = [0, \infty)$. Vis at følgen $\{f_n(x)\}$ konvergerer uniformt mot $f(x) = 0$.

Løsning

Vi regner avstand fra f_n til $f = 0$,

$$d_{[0,\infty)}(f_n, 0) = \max_{x\in[0,\infty)} \left| xe^{-nx} \right| .$$

Vi har at

$$f_n'(x) = e^{-nx} - xne^{-nx} = e^{-nx}(1 - nx) = 0 \Longrightarrow x = 1/n$$

og vi finner at $1/n$ er et toppunkt for f_n. Så $f_n(1/n) = (1/n)e^{-n(1/n)} = \frac{1}{ne^1}$ og derfor

$$\lim_{n\to\infty} d_{[0,\infty)}(f_n, 0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{ne^1} = 0 .$$

So $\{f_n\}$ konvergerer uniformt mot $f = 0$.