Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1102/6102 Grunnkurs i analyse II**

Faglig kontakt under eksamen: Eduard Ortega

Tlf:

Eksamensdato: August 2017

Eksamenstid (fra–til):

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Kode D:
Bestemt, enkel kalkulator

Annen informasjon:

- Alle svar må begrunnes og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd.
- Alle 9 deloppgaver teller likt ved karaktersetting.
- Lykke til!

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 2

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	2-sidig ☐
sort/hvit ☐	farger ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 Gitt ligningen til et ikke-degenert kjeglesnitt

$$x^2 + 2x + y^2 = 0\,.$$

Bestem hvilken type kjeglesnitt dette er, og finn eksentrisitet og sentrum.

Oppgave 2

a) Finn den generelle løsningen til differensialligningen

$$y'' + 2y' = 0\,.$$

b) Finn løsningen til differensialligningen

$$y'' + 2y' = xe^{-x}\,, \qquad y(0) = 6\,, \qquad y'(0) = -1\,.$$

c) Finn potensrekkeløsningen $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ til differensialligningen

$$y'' - xy' - y = 0$$

som tilfredsstiller $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$.

Oppgave 3 Funksjonen $f(x) = 2x + x\sin(x+3) - 5$ har nøyaktig ett nullpunkt. Bruk Newtons metode 2 ganger for å finne en tilnærmet verdi for nullpunktet. Sett $x_0 = 3$ og bruk kun 4 desimaler i beregningene dine.

Oppgave 4

a) Finn

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x\sin x}{(\ln(1+x))^4}\,.$$

b) Finn konvergensområdet til potensrekkene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 4^n} x^{2n}\,.$$

Oppgave 5 La $y(x)$ være løsningen av

$$y' = \frac{-x}{y^2} \qquad \text{med} \qquad y(0) = 1\,.$$

Bruk Eulers midtpunktsmetode med $h = 0.1$ til å approksimere verdien av $y(x)$ i punktene

$$x_1 = 0.1\,, \qquad \text{og} \qquad x_2 = 0.2\,.$$

(Bruk kun 4 desimaler i beregningene dine.)

Oppgave 6 La følgen $\{f_n(x)\}$ være gitt ved

$$f_n(x) = \frac{1}{n + n(x-n)^2} \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Bestem funksjonen $f(x)$ slikt at $\{f_n(x)\}$ konvergerer punktvis mot $f(x)$.

Konvergerer $\{f_n(x)\}$ uniformt mot $f(x)$?

Numeriske metoder

- Newtons metode: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
- Simpsons metode: $\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n := \frac{h}{3}\Big[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\Big]$ der $f_i = f(x_i)$. Husk: n må være et partall.

  Hvis f er fjerderivert på $[a, b]$, så har vi

$$|\int_a^b f(x)\,dx - S_n| = \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(c) \qquad \text{hvor } c \in [a, b]$$

- Eulers metode: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$
- Eulers midtpunktsmetode: $y_n = y_{n-1} + hf(x'_{n-1}, y'_{n-1})$
  der $(x'_{n-1}, y'_{n-1}) = (x_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{n-1} + \frac{h}{2} f(x_{n-1}, y_{n-1}))$.

Taylorrekker

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad -1 < x < 1\,.$$

Taylors formel med restledd

$$f(x) = T_n f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

der c er et tall i det åpne intervallet mellom a og x.

Eulers formel

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

Kjeglesnitt

Ligning for kjeglesnitt med eksentresitet $\varepsilon \neq 1$ (dvs. ellipse eller hyperbel), *styrelinje* $x = L$ og *brennpunkt* i $(B, 0)$ (med $B > L$):

$$y^2 = (\varepsilon^2 - 1)((x - \bar{x})^2 - a^2)\,,$$

der $\bar{x} = \frac{B - \varepsilon^2 L}{1 - \varepsilon^2}$ er *sentrum* i kjeglesnitt og $a^2 = (\frac{\varepsilon(B-L)}{1-\varepsilon^2})^2$.

For $\varepsilon = 1$ (parabel) har vi

$$y^2 = 2(B - L)x + L^2 - B^2\,.$$