

Oppgave 1 Finn ligningen til kjeglesnittet med brennpunkt $B = (1, 0)$, styrelinje $x = 3$ og eksentrisitet $\epsilon = 1/2$.

Oppgave 2

a) Skisser den parametriserte kurven gitt ved

$$x(t) = e^{-t} \cos t, \quad y(t) = e^{-t} \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

b) Regn ut buelengden av kurven i a).

Oppgave 3 Finn ut om rekkene

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((n-1/2)\pi)}{\sqrt{n}} \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^n}{(2n)!}$$

konvergerer eller divergerer.

Oppgave 4

a) Finn den generelle løsningen av den homogene ligningen

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

b) Finn løsningen av den inhomogene ligningen

$$y'' - 2y' + 2y = 2x$$

som i tillegg tilfredsstiller $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Oppgave 5 Bruk Eulers metode i 2 steg til å finne en tilnærming til løsningen av

$$y' = \frac{x+y}{1+xy}, \quad y(0) = 1$$

over intervallet $[0, 1]$.

Oppgave 6

- a) Bruk den geometriske rekken

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

til å vise at

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

for de x der rekken konvergerer.

- b) Finn konvergensintervallet til rekken i a) og bruk dette og Abels teorem til å vise at

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

- c) La

$$s_N = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Finn et tall N slik at

$$|\pi/4 - s_N| < 0,001.$$

FORMELARK FOR MA1102

Trigonometriske funksjoner

Identiteter:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\tan v$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-

Numeriske metoder

- Eulers metode: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$.

Taylorrekker

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Kjeglensnitt

Ligning for kjeglensnitt med eksentrisitet $\epsilon \neq 1$ (ellipse eller hyperbel), styrelinje $x = L$ og brennpunkt i $(B, 0)$ (med $B > L$):

$$y^2 = (\epsilon^2 - 1)((x - \bar{x})^2 - a^2),$$

der $\bar{x} = \frac{B - \epsilon^2 L}{1 - \epsilon^2}$ er sentrum i kjeglensnittet og $a^2 = \left(\frac{\epsilon(B-L)}{1-\epsilon^2}\right)^2$.

For $\epsilon = 1$ (parabel) har vi

$$y^2 = 2(B - L)x + L^2 - B^2.$$

