Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Harald Hanche-Olsen tlf. 922 48 767

EKSAMEN I GRUNNKURS I ANALYSE II (MA1102/MA6102)

Bokmål
Fredag 17. august 2012
Tid: 09:00 – 13:00
Sensur 7. september 2012

Hjelpemidler (Kode D): Bestemt kalkulator (Citizen SR-270X eller HP 30S)

Alle svar skal ha en god begrunnelse.
Ufullstendige svar gir delvis uttelling.
Du finner et ark med formler etter oppgavene.

Oppgave 1

a. For hvilke x konvergerer rekken $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3n+1}$?
For hvilke x konvergerer den absolutt?

Skriv $s(x)$ for summen av rekken ovenfor.

b. Finn den deriverte av $x \cdot s(x)$ med hensyn på x.

c. Finn en rekke som konvergerer mot integralet $\displaystyle\int_{-1}^{0} s(x)\,\mathrm{d}x$.

Bruk den til å beregne verdien av integralet med feil mindre enn 0,01.

Hvor mange ledd må du ha med for å få svaret med en feil mindre enn 10^{-6}?

Oppgave 2 En funksjon f er to ganger kontinuerlig deriverbar, og vi vet at $-2 < f''(x) \leq 0$ for alle $x \in [0,1]$. Dessuten er $f(0) = 1$, $f(\frac{1}{3}) = 1{,}256$, $f(\frac{2}{3}) = 1{,}348$ og $f(1) = 1{,}359$.

Bestem $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ så nøyaktig du kan, og angi usikkerheten i svaret.

Oppgave 3 En tangent til kurven $y = e^x$ passerer gjennom punktet $(0, -1)$. Finn en ligning for x-koordinaten til tangeringspunktet. Tangeringspunktet ligger i nærheten av $x = 1{,}3$. Finn en bedre tilnærming til tangeringspunktet ved å gjøre én iterasjon med Newtons metode.

Oppgave 4 En sirkel med radius 1 starter med sentrum i $(5, 0)$, og ruller deretter uten å gli langs utsiden av sirkelen $x^2 + y^2 = 4^2$. La t være vinkelen fra x-aksen til linjestykket mellom sentrene i de to sirklene. Et fast punkt P på den lille sirkelen, med koordinater $(4, 0)$ når $t = 0$, beveger seg langs en kurve C med parameterfremstilling

$$x = 5\cos t - \cos 5t, \quad y = 5\sin t - \sin 5t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

a. Skissér kurven C, og vis posisjonen av den lille sirkelen og punktet P for $t = 0$, $t = \pi/4$ og $t = \pi/2$ i figuren. Argumentér kort for at P flytter seg langs C slik som beskrevet ovenfor.

b. Finn buelengden til den delen av kurven C som ligger i første kvadrant.

Oppgave 5

En divergent rekke

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

med positive ledd er gitt. La $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ være n-te delsum i rekken.

I denne oppgaven skal du, med litt hjelp, vise at også rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad \text{der } b_n = \frac{a_n}{s_n}$$

er divergent.

Planen er slik: Vi setter $b_n = \dfrac{a_n}{s_n}$ og *antar at* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergerer*, og skal utlede en motsigelse fra det.

Forklar først hvorfor $b_1 = 1$, mens $0 < b_n < 1$ når $n \ge 2$. Forklar deretter hvorfor definisjonen av b_n kan skrives om til å gi $b_n s_n = s_n - s_{n-1}$, og bruk dette til å vise formelen

$$s_n = \frac{s_1}{(1 - b_2) \cdots (1 - b_n)}.$$

Vis ved induksjon på n at

$$(1 - b_m) \cdots (1 - b_n) \ge 1 - (b_m + \cdots + b_n)$$

når $n > m$.

Forklar hvorfor det følger av dette at det finnes en m slik $(1 - b_m) \cdots (1 - b_n) \ge \frac{1}{2}$ for alle $n \ge m$, og forklar til slutt hvorfor dette strider mot divergensen av rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.