MA1102 Analyse II 2012–05–30

Løsning

Løsningen er til tider i overkant kortfattet og mangelfull i begrunnelsen.

Oppgave 1

Vi deriverer og setter inn:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1+x^2} & f(1) &= \frac{1}{2} \\
f'(x) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} & f'(1) &= -\frac{1}{2} \\
f''(x) &= \frac{-2(1+x^2)^2+8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} & f''(1) &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Det søkte Taylorpolynomet er

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2.$$

Oppgave 2

Vi setter $f(x) = \arctan(2x) - x$ og finner

$$f'(x) = \frac{1-4x^2}{1+4x^2}$$

slik at f er voksende på $[0, \frac{1}{2}]$ og avtagende på $[\frac{1}{2}, \infty)$. Siden $f(0) = 0$, har f ingen nullpunkter i $(0, \frac{1}{2}]$. Og siden f er avtagende på $[\frac{1}{2}, \infty)$, har den høyst ett nullpunkt i dette intervallet. Ved skjæringssetningen finnes minst ett nullpunkt i $(\frac{1}{2}, 2)$, fordi $f(\frac{1}{2}) > 0$ og $f(2) < 0$.

Newtons metode ($x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$) gir følgende tabell:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	1	0.10715	−0.60000
1	1.17858	−0.00901	−0.69495
2	1.16562	−0.00004	

$x_2 = 1.16562$ er en god tilnærming til x_*, siden $f(x_2)$ er liten (og f' ikke er spesielt liten i nærheten av x_2).

Oppgave 3

a. Forholdstesten gir (absolutt) konvergens for $|x| < 1$, siden forholdet mellom absoluttverdiene av det $(n+1)$te leddet og det $n$te leddet er

$$\frac{(2n+1)x^2}{2n+3} \to x^2 \qquad \text{når } n \to \infty.$$

Alternerende rekketest gir konvergens for $x = \pm 1$, siden rekken alternerer, leddenes absoluttverdi avtar og leddene går mot null. Rekken konvergerer altså for $x \in [-1, 1]$.

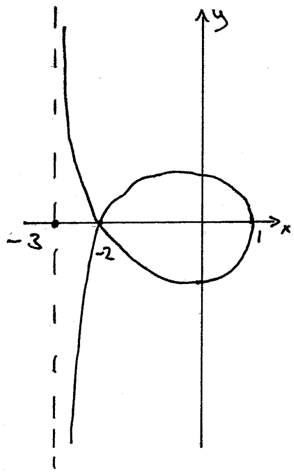
b. Om vi setter $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ så blir $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$. Vi integrerer dette fra $x = 0$, bruker at $f(0) = 0$, og konkluderer at $f(x) = \arctan x$, så summen av rekken er

$$\frac{\arctan x}{x}$$

for $x \in (-1, 1)$ (unntatt for $x = 0$, da summen blir 1). Ved Abels teorem holder formelen også i endepunktene, siden uttrykket over er kontinuerlig. Dermed gjelder formelen for $x \in [-1, 1]$.

Oppgave 4

a. I likheten merket med stjerne under brukes L'Hôpitals regel:



$$\lim_{\theta\to\pm 3\pi/2} x = \lim_{\theta\to\pm 3\pi/2} \frac{\cos\theta}{\cos\frac{1}{3}\theta} \overset{*}{=} \lim_{\theta\to\pm 3\pi/2} \frac{-\sin\theta}{-\frac{1}{3}\sin\frac{1}{3}\theta} = -3$$

$$\lim_{\theta\to\pm 3\pi/2} y = \lim_{\theta\to\pm 3\pi/2} \frac{\sin\theta}{\cos\frac{1}{3}\theta} = \mp\infty$$

(Pass på ensidige grenser i nummer 2: Fra venstre i $3\pi/2$, og fra høyre i $-3\pi/2$.)

Den håndtegnede figuren til høyre er ikke helt symmetrisk om x-aksen, slik den burde vært.

b.

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta/3)} = \left[\frac{3}{2}\tan\frac{\theta}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = 3\sqrt{3}$$

Oppgave 5

$(3^2)! = 362880$, så det er *plausibelt* at det er nok å ta med leddene $n = 0, 1, 2$ i begge summene.

For den første summen er dette korrekt, på grunn av alternerende rekketest med tilhørende feilestimat. En god nok tilnærming til den første summen er dermed

$$1 - 1 + \frac{1}{4!} = \frac{1}{24} \approx 0.041667$$

For den andre summen er det også korrekt, men der må vi jobbe litt hardere: Merk for eksempel at forholdet mellom ledd nummer $n+1$ og ledd nummer n er

$$\frac{(n^2)!}{((n+1)^2)!} = \frac{1}{(n^2+1)(n^2+2)\cdots(n+1)^2} < \frac{1}{(n+1)^2} \le \frac{1}{16}$$

for $n \ge 3$, så vi kan sammenligne med geometrisk rekke:

$$\sum_{n=3} \frac{1}{(n^2)!} < \sum_{n=3} \frac{1}{(3^2)!\cdot 16^n} = \frac{16}{9!\cdot 15} < 10^{-4}$$

med (svært!) god margin. En god nok tilnærming til den andre summen er dermed

$$1 + 1 + \frac{1}{4!} = 2\frac{1}{24} \approx 2.041667$$

Oppgave 6

Dette er en separabel likning. Vi setter $y(x) = xv(x)$ og finner

$$\begin{aligned} xv' + v &= \frac{x^2 v + x^2 v^2}{x^2} = v + v^2 \\ xv' &= v^2 \\ \frac{\mathrm{d}v}{v^2} &= \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ -\frac{1}{v} &= \ln(Cx) \\ v &= -\frac{1}{\ln(Cx)} \\ y &= -\frac{x}{\ln(Cx)} \end{aligned}$$

$v = 0$ (altså $y = 0$) er også en løsning, men den passer ikke i initialbetingelsen.

Initialbetingelsen $y = 1$ når $x = 1$ gir $C = 1/e$, så løsningen blir

$$y = -\frac{x}{\ln(x/e)}$$

Denne løsningen er gyldig for $x \in (0, e)$.