MA1102 Grunnkurs Analyse II – Løsningsforslag Eksamen vår 2021

Løsningsforslag — Øving

1 **a)** Differensialligningen $y'' + 2y' + y = \sin 2x$ skal løses generelt.
Først finner vi den generelle løsningen til den tilsvarende homogene ligningen, nemlig $y_h'' + 2y_h' + y_h = 0$. Det karakteristiske polynomet $r^2 + 2r + 1$ har én rot i $r = -1$, som gir løsningene

$$y_h = Ae^{-x} + Bxe^{-x},$$

der A og B er vilkårlige konstanter.
I neste steg finner vi en partikulærløsning til $y'' + 2y' + y = \sin 2x$. Vi gjetter at løsningen er på formen $y_p = C \sin 2x + D \cos 2x$, der konstantene C og D skal bestemmes. Om vi setter dette valget for y inn på venstre side, får vi

$$\begin{aligned}
&(C \sin 2x + D \cos 2x)'' + 2(C \sin 2x + D \cos 2x)' + (C \sin 2x + D \cos 2x) \\
=&(-4C \sin 2x - 4D \cos 2x) + 2(2C \cos 2x - 2D \sin 2x) + (C \sin 2x + D \cos 2x) \\
=&(-3C - 4D) \sin 2x + (4C - 3D) \cos 2x.
\end{aligned}$$

Ettersom vi krever at dette skal bli likt $\sin 2x$, gjenstår det å løse ligningssystemet

$$\begin{aligned}
-3C - 4D &= 1 \\
4C - 3D &= 0.
\end{aligned}$$

Løsningen på ligningssystemet er $C = -\frac{3}{25}$ og $D = -\frac{4}{25}$. Dermed gis en partikulærløsning ved $y_p = -\frac{3}{25} \sin 2x - \frac{4}{25} \cos 2x$.
Vi konkluderer med at den generelle løsningen til $y'' + 2y' + y = \sin 2x$ er

$$y = y_h + y_p = Ae^{-x} + Bxe^{-x} - \frac{3}{25} \sin 2x - \frac{4}{25} \cos 2x$$

der A og B er vilkårlige konstanter.

b) Differensialligningen $y''' + 8y = 0$ skal løses generelt. Dette er en lineær homogen tredjeordens differensialligning med konstante koeffisienter. Det karakteristiske polynomet er $r^3 + 8$ har én reell rot i $r = -2$ og to komplekse røtter i $r = 1 \pm i\sqrt{3}$. Den generelle løsningen blir derfor

$$y = c_1 e^{-2x} + e^x (c_2 \cos \sqrt{3}x + c_3 \sin \sqrt{3}x).$$

2 Vi skal vise at dersom $x = \cos^4 t$ og $y = \sin^4 t$ for $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, så er ligningen

$$2(x + y) = 1 + (x - y)^2 \tag{1}$$

tilfredstilt. Substitusjon på høyre side gir

$$\begin{aligned}1+(x-y)^2 &= 1+(\cos^4 t-\sin^4 t)^2 = 1+(\cos^2 t-\sin^2 t)^2\underbrace{(\cos^2 t+\sin^2 t)^2}_{=1}\\ &= 1+(\cos^2 t-\sin^2 t)^2 = (\cos^2 t+\sin^2 t)^2+(\cos^2 t-\sin^2 t)^2\\ &= 2(\cos^4 t+\sin^4 t) = 2(x+y),\end{aligned}$$

som skulle vises.

Vi skal nå bestemme hvilket kjeglesnitt dette er. Om vi dreier koordinatsystemet ved å innføre nye variable $x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$ og $y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(y-x)$, får vi en parabel på standardform: $1+2y'^2-2\sqrt{2}x' = 0$. Alternativt kan vi observere at ligningen (1) er ekvivalent med

$$\begin{aligned}& 1+(x-y)^2-2(x+y)=0\\ \iff\quad & x^2-2xy+y^2-2x-2y+1=0.\end{aligned}$$

Diskriminanten til dette kjeglesnittet er $(-2)^2-4\times 1\times 1 = 0$. Dette er derfor en parabel.

$\boxed{3}$ Vi skal først finne den punktvise grensen av funksjonen $f_n(x) = nx^a e^{-nx}$, som er definert på $[0,\infty)$, der a er et fiksert positivt heltall. Når $x > 0$, er denne grensen

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} nx^a e^{-nx} &= x^a \lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^{nx}}\\ &= x^a \lim_{m\to\infty}\frac{m/x}{e^m}\\ &= x^{a-1}\lim_{m\to\infty}\frac{m}{e^m}.\end{aligned}$$

Siden også $f_n(0) = 0$, kan vi nå slutte at funksjonsfølgen $\{f_n(x)\}$ konvergerer punktvis mot 0, ettersom eksponentialfunksjonen vokser raskere enn ethvert polynom.

Dersom konvergensen skal være uniform, må $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,\infty)} f_n(x)$ bli 0. Vi forsøker å finne denne verdien ved å derivere f_n. Skulle det finnes kun ett punkt slik at $f_n'(x) = 0$, blir dette et toppunkt ettersom funksjonen er positiv og $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$. Den deriverte er

$$f_n'(x) = nax^{a-1}e^{-nx} - n^2x^a e^{-nx}.$$

Denne er 0 når $nax^{a-1}e^{-nx} = n^2x^ae^{-nx}$, som skjer kun når $x = \frac{a}{n}$. Vi får dermed et toppunkt i $x = \frac{a}{n}$, der f_n oppnår verdien

$$f_n\left(\frac{a}{n}\right) = n\left(\frac{a}{n}\right)^a e^{-n\frac{a}{n}} = \frac{a^a e^{-1}}{n^{a-1}}.$$

Vi har nå kommet frem til at $\sup_{x\in[0,\infty)} f_n(x) = \frac{a^a e^{-1}}{n^{a-1}}$. Grenseveriden $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,\infty)} f_n(x)$ blir 0 hvis og bare hvis $a > 1$. Vi har derfor uniform konvergens hvis og bare hvis $a > 1$.

4 **a)** Vi skal bestemme konvergensintervallet til rekken $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$.
Anta først at x er positiv. Da får rekken positive ledd, som tillater bruk av sammenligningstesten. Ettersom $\ln n > 1$ for alle $n \geq 3$, kan denne rekken sammenlignes med $\sum_{n=2}^{\infty} x^n$. Dersom x er slik at $\sum_{n=2}^{\infty} x^n$ konvergerer, så vil også $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$ konvergere. Rekken $\sum_{n=2}^{\infty} x^n$ er geometrisk med x som felles faktor. Denne vil derfor konvergere hvis og bare hvis $|x| < 1$. Med andre ord er $[0, 1)$ inneholdt i konvergensintervallet til $\sum_{n=2}^{\infty} x^n$. Dette viser at $[0, 1)$ er inneholdt i konvergensintervallet til $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$.
Vi undersøker om punktet $x = 1$ befinner seg i konvergensintervallet. Her får vi rekken $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$. Med tanke på at $\ln n < n$ for alle $n > 0$, kan vi slutte at $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ divergerer siden vi vet at $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer.
Så langt har vi vist at konvergens intervallet enten er $(-1, 1)$ eller $[-1, 1)$. Konvergensintervallet er nemlig symmetrisk om $x = 0$. Det gjenstår altså å sjekke hvorvidt rekken konvergerer i $x = -1$. Der får vi den alternerende rekken $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$. Testen for alternerende rekker forteller oss at rekken konvergerer, ettersom tallfølgen $\left\{\frac{1}{\ln n}\right\}_n$ går monotont mot 0.
Konklusjonen blir at konvergensintervallet er $[-1, 1)$.

b) Vi viser at det finnes et moteksempel til dette utsagnet, nemlig $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ (eller $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$, om du vil). Vi har allerede vist at dette er en konvergent rekke. Det gjenstår å vise at alle rekkene $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)^k}$ divergerer, for alle positive heltall k.
Til dette formålet benytter vi sammenligningstesten. Om vi fikserer k, vet vi at $(\ln n)^k < n$ for store nok verdier av n. Med andre ord er $\frac{1}{(\ln n)^k} > \frac{1}{n}$ når n blir stor nok. Ettersom den harmoniske rekken divergerer, må også $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^k}$ gjøre det.

5 **a)** Ettersom $f(0) = -1$ og $f(1) = 1$, følger det fra skjæringssetningen at det finnes minst ett nullpunkt i intervallet $(0, 1)$. Dessuten er den deriverte positiv, som medfører at nullpunktet er entydig ved sekantsetningen.
Ulikheten $f(x) > f(y) + (x - y)f'(y)$ skal vises for alle $x, y \in (0, 1]$ slik at $x \neq y$. Her kan vi benytte Taylors teorem. Dette gir oss nemlig at

$$f(x) = f(y) + f'(y)(x - y) + \frac{f''(s)}{2}(x - y)^2,$$

der s befinner seg mellom x og y. Spesielt er s i intervallet $(0, 1]$, der den andrederiverte er positiv. Følgelig er

$$f(x) > f(y) + f'(y)(x - y), \tag{2}$$

som skulle vises.
Det er også mulig å bevise denne ulikheten på geometrisk vis. Det faktum at den andrederiverte er positiv, medfører at tangenten i ethvert punkt i $(0, 1]$ ligger under grafen til f.

b) Når vi bruker Newtons metode, får vi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{3}$$

(En geometrisk beskrivelse av x_{n+1} er som følger: trekk tangenten til f i punktet $(x, f(x_n))$ og velg x_{n+1} som skjæringspunktet på x-aksen.) Ved (2) har vi $f(x_{n+1}) > f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$. Ved induksjon betyr det at $f(x_n) > 0$ for alle n. Det betyr i sin tur at $x_{n+1} < x_n$ for alle n siden $f'(x) > 0$ for alle $x \in (0,1)$. Dermed har vi en avtagende følge som er begrenset nedenfra. Derfor finnes et reelt tall y slik at $x_n \to y$. Tar vi grensen på hver side av (3), får vi dermed

$$y = y - \frac{f(y)}{f'(y)}$$

som impliserer at $f(y) = 0$.

$\boxed{6}$ **a)** Vi tar for oss induksjonsbeviset først. Vi gjentar at $a_0 = a_1 = 1$, og at a_{n+2} for $n \geq 0$ er definert ved rekursjonen

$$a_n + (n+1)(n+2)a_{n+1} + (n+1)(n+2)a_{n+2} = 0. \tag{4}$$

Vi viser ved induksjon at

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq \frac{1}{2}$$

for alle $n \geq 0$. I grunntilfellet $n = 0$ blir dette forholdet åpenbart likt 1. Om vi antar at $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq \frac{1}{2}$ for alle $n \leq \ell$ der $\ell \geq 0$, følger det at brøken $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ befinner seg i intervallet $[-2, 2]$. Bruker vi (4), får vi

$$\begin{aligned}\frac{|a_{\ell+2}|}{|a_{\ell+1}|} &= \left|1 + \frac{a_\ell}{a_{\ell+1}} \cdot \frac{1}{(\ell+1)(\ell+2)}\right| \\ &\geq 1 - \frac{|a_\ell|}{|a_{\ell+1}|} \cdot \frac{1}{(\ell+1)(\ell+2)} \geq 1 - \frac{2}{(\ell+1)(\ell+2)},\end{aligned}$$

der vi først brukte trekantulikhet og deretter induksjonshypotesen. Siden $\frac{2}{(\ell+1)(\ell+2)} \leq 1/3$ når $\ell \geq 1$, følger nå resultatet ved induksjon.

Nå viser vi at $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$. Fra (4) og det vi nettopp viste, får vi at

$$\left|\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} + 1\right| = \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

Vi kan dermed slutte at $a_{n+1}/a_n \to -1$ som medfører at $|a_{n+1}|/|a_n| \to 1$ når $n \to \infty$.

b) Vi finner potensrekkeløsningen til initialverdiproblemet

$$(x+1)y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

La $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Da er

$$\begin{aligned}y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.\end{aligned}$$

Dette medfører at

$$
\begin{aligned}
(x+1)y'' + 2y' + y &= (x+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(a_n + (n+1)(n+2)a_{n+1} + (n+1)(n+2)a_{n+2}\Big)x^n.
\end{aligned}
$$

For at initialbetingelsen $y(0) = 0$ skal være gjeldende, må $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n 0^n = a_0 = 1$

Initalbetingelsen $y'(0) = 0$ stemmer kun dersom $a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n 0^{n-1} = a_1 = 1$.

Vi har vist at tallfølgen $\{a_n\}_n$ er den samme som vi jobbet med i forrige deloppgave.

Forholdstesten benyttes til å finne konvergensradien. La

$$
L(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|}.
$$

Dersom $L(x) < 1$, vet vi at x ligger innenfor konvergensintervallet, og det ligger utenfor dersom $L(x) > 1$. I dette tilfellet finner vi et enkelt uttrykk for $L(x)$, nemlig

$$
\begin{aligned}
L(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} \\
&= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \\
&= |x|,
\end{aligned}
$$

der vi siste linje bruker resultatet i forrige deloppgave. Dette viser at konvergensradien blir lik 1.