NTNU
Institutt for matematiske fag

Eksamen i MA1102/MA6102, 16.08.2014

Løsningsforslag

1 **a)** Karakteristisk ligning: $r^2 + r = 0$ gir røttene $r = 0$ og $r = -1$. Generell løsning blir $y = Ce^{-x} + D$.

b) Siden e^{-x} er en løsning av den homogene ligningen, har vi en partikulærløsning på formen $y_p = Axe^{-x}$. Vi får: $y_p' = A(1-x)e^{-x}$, $y_p'' = A(x-2)e^{-x}$. Vi setter disse uttrykkene inn i venstre side av differensialligningen og krever likhet med høyresiden: $y_p''+y_p' = Ae^{-x}(1-x+x-2) = -Ae^{-x} = e^{-x}$, som gir $A = -1$ og dermed $y_p = -xe^{-x}$. Generell løsning av den inhomogene ligningen blir derfor

$$y = Ce^{-x} + D - xe^{-x} = (C-x)e^{-x} + D.$$

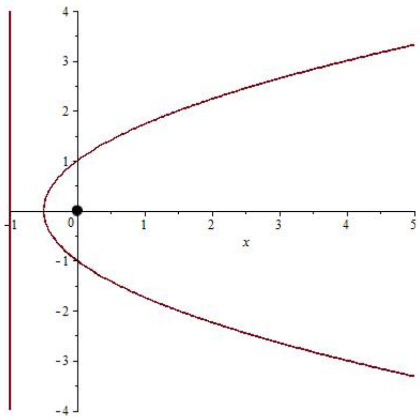
Finner så den spesielle løsningen som tilfredsstiller $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$:

$$\begin{aligned} y &= Ce^{-x} + D - xe^{-x} \Rightarrow y' = -Ce^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} \\ y(0) &= C + D = 1, \quad y'(0) = -C - 1 = 0 \Rightarrow C = -1, D = 2 \\ y &= -(1+x)e^{-x} + 2 \end{aligned}$$

2 Fra formelarket får vi at ligningen for en parabel med akse langs x-aksen, brennpunkt i $x = B$ og med styrelinje $x = L$ er gitt ved

$$y^2 = 2(B-L)x + L^2 - B^2.$$

For vår parabel $y^2 = 2x+1$ betyr dette at $B-L = 1$ og $L^2-B^2 = 1$, som gir $B = 0, L = -1$.



3 **a)** *i)* Sett $a_n = (-1)^n(1-\frac{1}{n})^n$. Vi har $|a_n| = (1-\frac{1}{n})^n \to 1/e \neq 0$, så rekken divergerer ved divergenstesten.

ii) Vi har $\cos\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2\cdot n^2}$ + ledd av høyere orden i $\frac{1}{n}$, så $1 - \cos\frac{1}{n} = \frac{1}{2\cdot n^2}$ + ledd av høyere orden i $\frac{1}{n}$. Dette indikerer at det vil være naturlig å sammenligne rekken $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n})$ med rekken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Vi prøver grensesammenligningstesten (merk at begge rekkene har positive ledd):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \overset{t=1/n}{=} \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2} \overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2t} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos t}{2} = \frac{1}{2} < \infty.$$

Siden rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ er konvergent, følger ved grensesammenligningstesten at rekken $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n})$ også er konvergent.

b) For begge rekkene gjelder åpenbart at leddene går mot 0. Vi undersøker de andre egenskapene:
i) Sett $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$. Hvis n er like, er $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} > 0$. Hvis n er odde, er $a_n = -\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} < 0$ for $n > 1$. Så rekken er alternerende.
Rekken $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ er konvergent ved testen for alternerende rekker, mens den harmoniske rekken $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ er divergent. Det følger at rekken $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)$ er divergent som sum av en konvergent og en divergent rekke.
ii) Sett $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}$. At rekken er alternerende, følger på samme måte som ovenfor: Hvis n er like, er $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} > 0$. Hvis n er odde, er $a_n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < 0$ for $n > 1$. Så rekken er alternerende.
Rekken $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ er konvergent ved testen for alternerende rekker. Rekken $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ er også konvergent (p-rekke med $p = 2 > 1$, eller ved integraltesten). Det følger at rekken $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$ er konvergent som sum av to konvergente rekker.

4 Potensrekke for $\int_0^x \sin(t^2)dt$:

$$f(x) = \int_0^x \sin(t^2)dt = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(t^2)^{2k+1}\right) dt = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{4k+2}\right) dt$$
$$\stackrel{(*)}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^x \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{4k+2} dt\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot \frac{x^{4k+3}}{4k+3},$$

hvor likheten $(*)$ følger av at rekken konvergerer uniformt på ethvert endelig intervall og derfor kan integreres leddvis over intervallet fra 0 til x, for alle x.

Bestemmelse av $f(1) = \int_0^1 \sin(t^2)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{1}{4k+3}$ *med feil mindre enn* 10^{-4}*:* Sett $a_k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{1}{4k+3}$. Siden rekken er alternerende, er feilen vi gjør ved å bryte av rekken ved leddet med indeks N, mindre enn absoluttverdien til det første utelatte leddet, dvs., mindre enn $|a_{N+1}| = \frac{1}{(2N+3)!}\frac{1}{4n+7}$. Så det holder å velge N så stor at $|a_{N+1}| < 10^{-4}$. For å undersøke dette, lager vi oss en tabell:

N	$\lvert a_{N+1}\rvert = \frac{1}{(2N+3)!}\frac{1}{4n+7}$
0	$1/42 = 0.02380952381\ldots$
1	$1/1320 = 0.0007575757576\ldots$
2	$1/75600 = 0.00001322751323\ldots$

og vi ser at $N = 2$ holder. Dette gir

$$\int_0^1 \sin(t^2)dt \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3!}\frac{1}{7} + \frac{1}{5!}\frac{1}{11} = 2867/9240 \approx 0.31028\ldots$$

med en feil mindre enn $1/75600 < 1.4 \cdot 10^{-5} < 10^{-4}$.

5 **a)** Sett $f(t) = \frac{1}{1+t}$. Vi har $n = 4$ delintervall, så hvert delintervall har lengde $\Delta x = 1/4$. Simpsons metode gir da følgende tilnærmede verdi for integralet $\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = [\ln(1+t)]_{t=0}^{t=1} = \ln 2$:

$$\frac{1/4}{3}\left(f(0) + 4\cdot f(1/4) + 2\cdot f(1/2) + 4\cdot f(3/4) + f(1)\right) = 1747/2520 \approx 0.6932539683\ldots.$$

Feilestimatet for Simpsons metode sier at feilen er mindre enn $\frac{K(b-a)^5}{180n^4} = \frac{K\cdot 1^5}{180\cdot 4^4} = \frac{K}{46080}$, hvor K er slik at $|f^{(4)}(t)| \leq K$ for $t \in [0,1]$. Vi har $f^{(4)}(t) = 24/(1+t)^5$, og denne når sin største verdi på intervallet $[0,1]$ når $t = 0$, så vi kan ta $K = f^{(4)}(0) = 24$. Dette gir at feilen er mindre enn $\frac{24}{46080} = \frac{1}{1920} \approx 0.0005208333333\ldots$

b) Summeformel for geometrisk rekke:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n, \quad |t| < 1.$$

For $|x| < 1$ kan rekken integreres leddvis over intervallet fra 0 til x, og vi får

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x (-1)^n t^n dt\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.\end{aligned}$$

For $x = -\frac{1}{2}$ gir dette

$$\ln(1-\frac{1}{2}) = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-\frac{1}{2})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\frac{1}{n2^n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$$

$$\text{dvs.,} \quad \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}.$$

c) For et vilkårlig naturlig tall N har vi

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n2^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n2^n},$$

så feilen som gjøres (i beregningen av $\ln 2$) ved å bryte av rekken etter N ledd er lik $\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$. Vi har

$$\begin{aligned}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n2^n} &< \frac{1}{N+1}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{N+1}\cdot\frac{1}{2^{N+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{(N+1)2^{N+1}}\cdot 2 \\ &= \frac{1}{N+1}2^{-N}.\end{aligned}$$

Feilestimatet fra **a)** var på 1/1920. Vi prøver oss frem med kalkulatoren og finner

N	$\frac{1}{N+1}2^{-N}$
7	1/1024
8	1/2304

så vi ser at vi må ta med minst 8 ledd for å få like godt resultat som med Simpsons metode (ifølge våre feilestimat).