Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA1102/MA6102 Grunnkurs i analyse II
Eksamen 27 mai 2014

Løsningsforslag

1 **a)** Karakteristisk ligning: $r^2 + 4r + 5 = 0$ gir $r = -2 \pm i$. Generell løsning blir derfor $y = e^{-2x}(C \cos x + D \sin x)$.

b) Finner først en partikulær løsning y_p. Den må ha formen $y_p = Ax + B$. Innsetting i differensialligningen: $y_p'' + 4y_p' + 5y_p = 4A + 5Ax + 5B = 5Ax + (5B + 4A) = 25x$. Siden siste likhet skal holde for alle x, får vi $5A = 25$ og $4A + 5B = 0$, dvs., $A = 5$, $B = -4$, så $y_p = 5x - 4$. Generell løsning: $y = e^{-2x}(C \cos x + D \sin x) + 5x - 4$.
Løsningen som oppfyller de gitte initialbetingelsene:

$$
\begin{aligned}
y(0) &= C - 4 = -3 \Rightarrow C = 1 \\
y' &= -2e^{-2x}(C \cos x + D \sin x) + e^{-2x}(-C \sin x + D \cos x) + 5 \\
&= e^{-2x}\left((-2C + D) \cos x + (-C - 2D) \sin x\right) + 5 \\
y'(0) &= -2C + D + 5 = -2 + D + 5 = D + 3 = 3 \Rightarrow D = 0 \\
y &= e^{-2x} \cos x + 5x - 4
\end{aligned}
$$

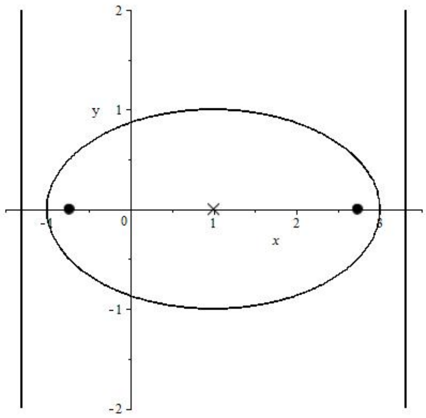
2 Fra formelarket får vi at ligningen for en ellipse med eksentrisitet ϵ, sentrum i $(\bar{x}, 0)$ og stor halvakse a kan skrives på følgende standard form:

$$\frac{(x-\bar{x})^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1-\epsilon^2)a^2} = \frac{(x-\bar{x})^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

der $b^2 = (1-\epsilon^2)a^2$. Vi bringer vår ellipse på standard form:

$$
\begin{aligned}
& x^2 - 2x + 4y^2 = (x-1)^2 - 1 + 4y^2 = 3 \\
\Rightarrow\quad & (x-1)^2 + 4y^2 = 4 \\
\Rightarrow\quad & \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1
\end{aligned}
$$

Av dette ser vi at sentrum er i $(1, 0)$, og at $a^2 = 4$, $b^2 = 1$. Så vi får $a =$ store halvakse $= 2$, $b =$ lille halvakse $= 1$, $\epsilon = \sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2} = \sqrt{1 - 1/4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Fra formelarket får vi videre: $\bar{x} = 1 = \frac{B - \epsilon^2 L}{1-\epsilon^2} = \frac{B - \frac{3}{4}L}{1 - \frac{3}{4}} = 4B - 3L$, $a = 2 =$



Figur 1: Skisse av ellipsen. Sentrum er markert med et kryss, de to fylte sirklene er brennpunktene, og de to vertikale linjene på hver side av ellipsen er styrelinjene.

$\frac{\epsilon(B-L)}{1-\epsilon^2} = 2\sqrt{3}(B-L)$, dvs., $1 = 4B - 3L$ og $B = L + \frac{1}{\sqrt{3}}$, som til sammen gir $L = 1 - \frac{4}{\sqrt{3}}$, $B = 1 - \sqrt{3}$. Så venstre styrelinje er gitt ved $x = 1 - \frac{4}{\sqrt{3}}$ og venstre brennpunkt er i $(1-\sqrt{3}, 0)$. Pga. symmetri om sentrum har vi også en høyre styrelinje gitt ved $x = 1 + \frac{4}{\sqrt{3}}$ og et høyre brennpunkt i $(1+\sqrt{3}, 0)$. Oppsummert:

- Sentrum: $(1, 0)$.
- Eksentrisitet: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Brennpunkter: $(1-\sqrt{3}, 0)$ og $(1+\sqrt{3}, 0)$.
- Styrelinjer: $x = 1 - \frac{4}{\sqrt{3}}$ og $x = 1 + \frac{4}{\sqrt{3}}$.
- Store halvakse $a = 2$, lille halvakse $b = 1$.

3 **a)** Vi har $n = 4$ og $\Delta = \frac{1}{4}$, så med $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ får vi

$$\begin{aligned}
T_4 &= \frac{\Delta}{2}\left(f(0) + 2f(\frac{1}{4}) + 2f(\frac{2}{4}) + 2f(\frac{3}{4}) + f(1)\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(1 + 2\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{16}} + 2\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{16}} + 2\cdot\frac{1}{1+\frac{9}{16}} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{5323}{6800} \approx 0.7827941176
\end{aligned}$$

Feilestimat:

$$\left|\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt - T_4\right| \le \frac{2\cdot(1-0)^3}{12\cdot 4^2} = \frac{1}{96} = 0.0104166\ldots$$

b) Summeformel for geometrisk rekke: $\frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n$, $|r| < 1$. Med $r = -t^2$ gir dette:$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$, $|t| < 1$. Hvis $|x| < 1$, konvergerer rekken uniformt på intervallet mellom 0 og x og kan derfor integreres leddvis der. Vi får:

$$\begin{aligned}
\arctan(x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right) dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x (-1)^n t^{2n} dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1.
\end{aligned}$$

Vi undersøker så endepunktene. For $x = 1$ får vi rekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, og for $x = -1$ får vi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$. Begge rekkene konvergerer ved testen for alternerende rekker. La oss sjekke at betingelsene for denne testen er oppfylt: Rekken er opplagt alternerende, og med $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ har vi $|a_{n+1}| = \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{2n+1} = |a_n|$ og $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$. Så betingelsene er oppfylt. Sett $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| \leq 1$. Ifølge Abels kontinuitetssetning er $s(x)$ kontinuerlig på hele det lukkede intervallet $[-1, 1]$. Spesielt har vi at $\lim_{x\to 1^-} s(x) = s(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Siden $s(x) = \arctan(x)$ for $|x| < 1$, følger at $\lim_{x\to 1^-} s(x) = \lim_{x\to 1^-} \arctan(x)$, det vil si, $s(1) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Men dette betyr at $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, som skulle vises.

c) Summen av de 5 første leddene i rekken for $\frac{\pi}{4}$: $\sum_{n=0}^{4} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 = \frac{263}{315} = 0.8349206349\ldots$. For å estimere feilen, sett igjen $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Feilestimatet for alternerende rekker sier at feilen som gjøres ved å bryte av rekken etter et endelig antall ledd, er mindre eller lik absoluttverdien til det første utelatte leddet, dvs., $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{N} a_n\right| \leq |a_{N+1}|$.
I vårt tilfelle er $N = 4$, så $\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} - \sum_{n=0}^{4} \frac{(-1)^n}{2n+1}\right| \leq |a_5| = 1/11$.
For å få like god nøyaktighet som i punkt **a)**, må vi velge N så stor at $|a_{N+1}| = \frac{1}{2N+3} \leq 1/96$, dvs., $N \geq 47$ (så vi må ta med 48 ledd).

4 **a)** Innsetting av $x = 0$ i differensialligningen gir $0 \cdot y''(0) + 2 \cdot y'(0) + 0 \cdot y(0) = 2 \cdot y'(0) = 0$, dvs., $y'(0) = 0$.
For å bestemme koeffisientene a_n beregner vi først:

$$\begin{aligned}
xy &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n \\
y' &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\
y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1} \\
xy'' &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n
\end{aligned}$$

Videre:

$$
\begin{aligned}
xy'' + 2y' + xy &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n \\
&= 2a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n(n+1) + 2(n+1))a_{n+1} + a_{n-1}]x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)(n+2))a_{n+1} + a_{n-1}]x^n \text{ (siden } a_1 = y'(0) = 0)
\end{aligned}
$$

For at dette skal være en løsning av differensialligningen, må den siste rekken være lik 0 for alle x i en omegn om 0, og det betyr igjen at alle koeffisientene foran x^n må være lik 0, dvs., vi får følgende *rekursjonsformel:*

$$(n+1)(n+2)a_{n+1} + a_{n-1} = 0, \quad n \geq 1.$$

Siden $a_1 = 0$ og rekursjonsformelen har et sprang på 2, blir $a_n = 0$ for alle odde indekser n. For leddene med like indeks $2k$ får vi:

$$
\begin{aligned}
(2k+2)(2k+3)a_{2k+2} + a_{2k} &= 0 \\
\text{dvs.,} \quad a_{2k+2} &= -\frac{1}{(2k+2)(2k+3)}a_{2k}, \quad k \geq 0.
\end{aligned}
$$

Ved suksessiv innsetting av $k = 0, 1, 2, \ldots$ i denne rekursjonsformelen får vi: $a_2 = -\frac{1}{2\cdot 3}a_0$, $a_4 = -\frac{1}{4\cdot 5}a_2 = \frac{1}{2\cdot 3}\frac{1}{4\cdot 5}a_0$, $a_6 = -\frac{1}{6\cdot 7}a_4 = -\frac{1}{2\cdot 3}\frac{1}{4\cdot 5}\frac{1}{6\cdot 7}a_0$ osv. Vi ser at mønsteret blir $a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}a_0$, og siden $a_0 = y(0) = 1$, får vi til slutt

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}.$$

b) Løsningen funnet i **a)** er gitt ved $y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k}$. For å finne konvergensintervallet setter vi $u_k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k}$ og bruker forholdstesten: $\lim_{k\to\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(2k+2)(2k+3)}x^2 = 0 < 1$ for alle x, så rekken konvergerer for alle x, dvs., konvergensintervallet er hele tall-linjen $(-\infty, \infty)$. For $x \neq 0$ har vi $y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k} = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} = \frac{\sin x}{x}$ (jfr. formelarket). Vi har også $y(0) = 1$, så vi får til slutt:

$$y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$