Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

# MA1102 Grunnkurs Analyse II Vår 2021

**Løsningsforslag — Øving 13**

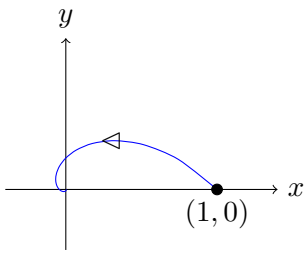
**1** Vi skal finne ligningen for kjeglesnittet med brennpunkt $B = (1, 0)$, styrelinje $\ell\colon x = 3$ og eksentrisitet $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (dette er faktisk en ellipse). La $P = (x, y)$ være et vilkårlig punkt på kjeglesnittet. Da må det stemme at

$$|PB| = \varepsilon |P\ell|.$$

Om vi benytter Pythagoras' læresetning for å

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-1)^2 + y^2} &= \frac{1}{2}|x-3| \\
\implies \quad (x-1)^2 + y^2 &= \frac{1}{4}(x-3)^2 \\
\implies \quad x^2 - 2x + 1 + y^2 &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} \\
\implies \quad \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + y^2 - \frac{5}{4} &= 0.
\end{aligned}$$

**2** **a)** Grafen til den parametriske kurven $(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$ ser omtrent slik ut:



**b)** Buelengden gis ved

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(e^{-t}\cos t\big)^2\Big) + \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(e^{-t}\sin t\big)\Big)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{\Big(-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t\Big)^2 + \Big(-e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t\Big)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} e^{-t}\sqrt{\Big(-\cos t - \sin t\Big)^2 + \Big(-\sin t + \cos t\Big)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} e^{-t}\sqrt{\big(\cos^2 t + 2\cos t\sin t + \sin^2 t\big) + \big(\sin^2 t - 2\sin t\cos t + \cos^2 t\big)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} e^{-t}\sqrt{\big(\cos^2 t + \sin^2 t\big) + \big(\sin^2 t + \cos^2 t\big)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} e^{-t}\sqrt{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{2}\big[-e^{-t}\big]_0^{2\pi} \\
&= \sqrt{2}\left(1 - e^{-2\pi}\right).
\end{aligned}
$$

$\boxed{3}$ **a)** Vi skal undersøke hvorvidt rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left((n-\frac{1}{2})\pi\right)}{\sqrt{n}}$ konvergerer eller divergerer. Legg merke til at dette simpelthen er rekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, som er en alternerende rekke med monotont avtagenede ledd. Testen for alternerdene rekker viser derfor at denne er konvergent.

**b)** Vi skal undersøke hvorvidt rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n n!}{(2n)!}$ konvergerer eller divergerer. Dette er en positiv rekke, som blant annet gjør forholdstesten anvendbar. La

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}(n+1)!}{(2(n+1))!}}{\frac{n^n n!}{(2n)!}}.$$

Dersom denne er mindre enn 1 blir rekken konvergent. Vi har nemlig at

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \\
&= \frac{e}{4} < 1,
\end{aligned}
$$

der vi i siste steg benytter definisjonen av Eulers tall og L'Hôpitals regel. Det følger at rekken konvergerer.

$\boxed{4}$ **a)** Vi skal bestemme den generelle løsningen av den homogene differensialligningen

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

Den karakteristiske ligningen er $r^2 - 2r + 2 = 0$, og $abc$-formelen gir at røttene til denne er $r = 1 \pm i = a \pm bi$. Følgelig blir den generelle løsningen

$$y = Ae^{ax}\cos bx + Be^{ax}\sin bx = Ae^{x}\cos x + Be^{x}\sin x,$$

der $A$ og $B$ er vilkårlige konstanter.

**b)** Nå skal vi løse initialverdiproblemet

$$y'' - 2y' + 2y = 2x, \tag{1}$$

med initialverider $y(0) = 1$ og $y'(0) = 2$. Vi bruker ukjente koeffisienters metode til å finne en partikulærløsning $y_p$. Vi antar at $y_p$ er på formen $Cx + D$, der $C$ og $D$ er konstanter. Ettersom det må stemme at

$$-2C + 2(Cx + D) = 2x.$$

bestemmer vi $C$ og $D$ som løsningene til ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2D - 2C &= 0, \\ 2C &= 2. \end{aligned}$$

Det er rimelig lett å se at $C = D = 1$, som gir partikulærløsningen $y_p = x + 1$. Den generelle løsningen av (1) blir dermed

$$y = x + 1 + Ae^{x}\cos x + Be^{x}\sin x,$$

der $A$ og $B$ er vilkårlige konstanter.
Initialbetingelsen $y(0) = 1$ gir

$$1 = 0 + 1 + Ae^{0}\cos 0 + Be^{0}\sin 0 = 1 + A.$$

Dermed er $A = 0$, og løsningen på initialverdiproblemet er på formen

$$y = x + 1 + Be^{x}\sin x.$$

Således er

$$y' = 1 + Be^{x}\sin x + Be^{x}\cos x.$$

Initialbetingelsen $y'(0) = 2$ gir derfor at

$$2 = 1 + Be^{0}\sin 0 + Be^{0}\cos 0 = 1 + B,$$

og dermed må $B$ bli 1.
Vi konkluderer med at løsningen på initialverdiproblemet er

$$y = x + 1 + e^{x}\sin x.$$

**5** Vi bes om å bruke Eulers metode med to steg for å tilnærme (en viss verdi av) løsningen $y$ av

$$y' = \frac{x+y}{1+xy}, \quad y(0) = 1,$$

på intervallet $[0,1]$. I Eulers metode bruker vi en steglengde $h$, som i dette tilfellet blir $\frac{1}{2}$; den er lik lengden på intervallet delt på antall steg vi skal gjennomføre. Initialbetingelsen sier at punktet $(x_0, y_0) = (0,1)$ er på løsningsfunksjonen. Dermed går vi rekursivt til verks for å finne estimat for verdiene $y_i = y(x_0 + ih)$. I $(i+1)$-ste steg er formelene

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{2}, \tag{2}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}\frac{x_i + y_i}{1 + x_i y_i}. \tag{3}$$

I følge formelen blir

$$x_1 = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$
$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}\frac{x_0 + y_0}{1 + x_0 y_0} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{1} = \frac{3}{2}.$$

og

$$x_2 = x_1 + \frac{1}{2} = 1,$$
$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}\frac{x_1 + y_1}{1 + x_1 y_1} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{1 + \frac{1}{2}\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} + \frac{4}{7} = \frac{29}{14}.$$

**6** **a)** Det er kjent at den geometiske rekken $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergerer mot $\frac{1}{1-x}$ for alle $x \in (-1,1)$. Om vi erstatter $x$ med $-x^2$ får vi at $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ konvergerer mot $\frac{1}{1+x^2}$ for alle $x \in (-1,1)$ (siden dette er $x$-verdiene slik at $-x^2 \in (-1,1)$). Ettersom $\frac{1}{1+x^2}$ er den deriverte til $\arctan x$, kan vi integrere potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ og få en potensrekke som konvergerer mot $\arctan x$ for alle $x \in (-1,1)$ (og kanskje også i endepunktene). Resultatet blir $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, slik oppgaven hevder.

**b)** I oppgave (a) oppnådde vi potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ ved å integrere en potensrekke som konvergerte for alle $x \in (-1,1)$. Konvergensradiusen til den integrerte potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ er det samme som $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, altså 1, men det kan ha oppstått konvergens i endepunktene.
Om vi evaluerer i $x = -1$ får vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (-1)^{2n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Testen for alternerende rekker forsikrer oss at dette konvergerer. I $x = 1$ får vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}(1)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

som konvergerer av samme årsak. Konvergensområdet blir således $[-1, 1]$. Følgelig har potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ konvergensradius lik 1. Dessuten konvegerer rekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Det følger fra Abels teorem at

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Her er venstresiden lik $\lim_{x \to 1^-} \arctan(x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Dermed kan $\frac{\pi}{4}$ oppnås som grensen til den alternerende rekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, som skulle vises.

**c)** Vi har definert $s_N$ som den $N$-te delsummen til $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, altså den endelige summen $\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Ettersom dette er en alternerende rekke med monotont avtagende ledd, er feilestimatet $\left|\frac{\pi}{4} - s_N\right|$ gitt ved $E_n = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)+1}\right| = \frac{1}{2n+3}$, altså størrelsen på det $(n+1)$-ste leddet i rekken. Dersom vi ønsker at $E_n < 0{,}001$, må $n$ være minst 499.