Oppgave 1

a) Finn den generelle løsningen til differensialligningen

$$y'' + 2y' + y = \sin 2x.$$

b) Finn den generelle løsningen til differensialligningen $y''' + 8y = 0$.

Oppgave 2 Vis at den parametriske kurven

$$x = \cos^4 t, \quad y = \sin^4 t, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

er en parametrisering av en del av kurven med ligning

$$2(x + y) = 1 + (x - y)^2.$$

Hva slags kjeglesnitt beskriver denne ligningen?

Oppgave 3 La a være et positivt reelt tall. Bestem funksjonen f slik at $nx^a e^{-nx}$ konvergerer punktvis mot f på $[0, \infty)$. For hvilke a er konvergensen uniform på $[0, \infty)$?

Oppgave 4

a) Finn konvergensintervallet til potensrekken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}.$$

b) Anta at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer. Avgjør om følgende utsagn er sant: Det finnes et positivt heltall k slik at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^k$ konvergerer. (Hint: Kan du bruke noe du gjorde i punkt a)?)

Oppgave 5 La f være en kontinuerlig funksjon på intervallet $[0, 2]$, og anta at $f(0) = -1$ og $f(1) = 1$. Vi antar at f' og f'' begge er kontinuerlige på $(0, 2)$ og også at $f'(x) > 0$ og $f''(x) > 0$ for $0 < x < 2$.

a) Begrunn at ligningen $f(x) = 0$ har nøyaktig én løsning for $0 < x < 1$. Vis i tillegg at

$$f(x) > f(y) + f'(y)(x - y)$$

når $x \neq y$ og $x, y \in (0, 1]$.

b) Vi bruker Newtons metode med $x_0 = 1$ for å løse ligningen $f(x) = 0$ for $0 < x < 1$. Begrunn at iterasjonene x_n i Newtons metode tilfredsstiller ulikheten $x_{n+1} < x_n$ for alle $n \geq 0$. Hvorfor kan vi nå slutte at iterasjonene x_n konvergerer mot løsningen til ligningen?

Oppgave 6

a) La $a_0 = a_1 = 1$, og la a_{n+2} for $n \geq 0$ være definert ved rekursjonen

$$a_n + (n + 1)(n + 2)a_{n+1} + (n + 1)(n + 2)a_{n+2} = 0.$$

Vis ved induksjon at

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq \frac{1}{2}$$

for $n \geq 0$, og bruk dette til å slutte at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1.$$

b) La $y = f(x)$ være løsningen til initialverdiproblemet

$$(x + 1)y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

Det oppgis at f kan representeres ved en Maclaurin-rekke. Bestem konvergensradien til denne rekken.