NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1102 Analyse 2**

Faglig kontakt under eksamen: Kristian Seip

Tlf: 911 29 136

Eksamensdato: 11. august 2021

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: A: Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Alle kalkulatorer tillatt.

Annen informasjon:
Denne prøven består av 10 delpunkt som alle teller like mye. I og med at alle hjelpemidler er tillatt, er det viktig at svarene på oppgavene er godt begrunnet.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1 La punktet $(5/\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ ligge på en ellipse med brennpunkt $(-3, 0)$ og $(3, 0)$. Finn ligningen til ellipsen.

Oppgave 2 Finn den generelle løsningen til differensiallignigen

$$y'' + 4y' + y = x^2.$$

Oppgave 3

a) Finn de komplekse kvadratrøttene til henholdsvis

$$1 + i \quad \text{og} \quad 1 - i.$$

b) Finn den generelle løsningen til differensiallignigen $y'''' + 2y'' + 2y = 0$.

Oppgave 4

a) Ta stilling til eventuell konvergens av de to rekkene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \cos n}{n^2 + 2n} \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}.$$

b) Bestem konvergensintervallet til potensrekken

$$\sum_{n=3}^{\infty} n^{-1} e^{-\sqrt{\ln \ln n}} x^n.$$

Oppgave 5

a) La

$$f_n(x) = \frac{1}{n \cosh(nx)}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Vis at f_n konvergerer uniformt mot en grensefunksjon f på $\mathbb{R}$.

b) Vis at f_n' konvergerer punktvis mot f' på $\mathbb{R}$. Avgjør om denne konvergensen også er uniform.

Oppgave 6 La f være en odde deriverbar funksjon på $\mathbb{R}$, og anta at f' er kontinuerlig og tilfredsstiller

$$0 < f'(x) \leq \frac{1}{(1+x)^2}$$

for $x \geq 0$. Vi har dermed $f(x) = 0$ hvis og bare hvis $x = 0$. Vis at det finnes et positivt tall a slik at hvis vi velger $x_0 \geq a$, så vil iterasjonene $x_1, x_2, \ldots$ i Newtons metode for ligningen $f(x) = 0$ tilfredsstille $|x_{n-1}| \leq |x_n|$ for alle n, $n = 1, 2, \ldots$. (Hint: Hva kan du si om hvor stor $|f(x)/f'(x)|$ er? Lag gjerne en skisse som illustrerer hva som skjer når du anvender Newtons metode og x_0 er "for stor".)

Oppgave 7 Avgjør om noen av følgende to utsagn er sanne:

a) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer absolutt, så konvergerer også $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{a_n} - 1)$ absolutt.

b) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer, så konvergerer også $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{a_n} - 1)$.