Semesterprøve MA1102 Grunnkurs i analyse II — 6/3 2009
Fasit med kommentarer

Oppgave 1: Hva er buelengden til kurven med parametrisering $x = 1 + 3t^2$, $y = 4 + 2t^3$, $0 \le t \le 1$?

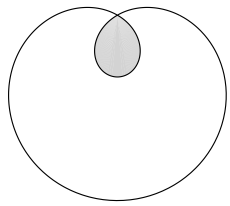
a) ☐ $\sqrt{2} - 2$ b) ☐ $2\sqrt{2} - 2$ c) ☒ $4\sqrt{2} - 2$ d) ☐ $2 - \sqrt{2}$ e) ☐ $4 - \sqrt{2}$

Bruk formelen for buelengde. Leddene innenfor rottegnet har 6^2t^2 som felles faktor, utenfor rottegnet blir de $6t$. Bruk substitusjonen $u = 1 + t^2$.

Oppgave 2: Kurven beskrevet i polarkoordinater ved $r = 1 - 2\sin\theta$ for $0 \le \theta \le 2\pi$ er vist på figuren. Hva er arealet til det skraverte området?

a) ☒ $\displaystyle\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 - 2\sin\theta)^2/2\, d\theta$ c) ☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{5 - 4\sin\theta}\, d\theta$

b) ☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi} (1 - 2\sin\theta)^2/2\, d\theta$ d) ☐ $\displaystyle\int_{5\pi/4}^{7\pi/4} (1 - 2\sin\theta)^2/2\, d\theta$



Når vinkelen er null har vi radius 1, så $(1, 0)$ er på kurven. Økende vinkel gir avtagende radius, som blir null når $\sin\theta = 1/2$, m.a.o. når $\theta = \pi/6$. Øker vi vinkelen videre blir r negativ, slik at vi kommer på undersiden av x aksen. Vi kommer tilbake til origo igjen neste gang $\sin\theta = 1/2$, m.a.o. $\theta = 5\pi/6$. For resten av vinklene har vi positiv r intil vi er tilbake til $(1, 0)$ når $\theta = 2\pi$. Altså er det grå området definert av vinkler mellom $\pi/6$ og $5\pi/6$. Bruk deretter formelen for areal. (c) gir en buelengde, hvilken?)

Oppgave 3: Hvilket av kjeglesnittene har et brennpunkt i $(2, 1)$?

a) ☐ Hyperbelen med toppunkt i $(0, 1)$ og $(0, -1)$ og asymptoter gitt ved $y^2 - x^2 = 0$.

b) ☐ Parabelen som har styrelinje $x = -2$ og som går gjennom punktene $(2, 0)$ og $(2, 2)$.

c) ☒ Ellipsen med styrelinjer i $x = -8$ og $x = 8$ og et av toppunktene i $(4, 1)$.

d) ☐ Sirkelen med radius 4 og sentrum i origo.

Sirkelen kan tenkes på som en ellipse der begge brennpunktene er i origo. Asymptotene til hyperbelen viser at x-aksen og y-aksen er symetriakser. Det oppgitte toppunktet forteller at brennpunktene ligger på y-aksen. Parabelen er heller ikke riktig: se på avstanden fra de oppgitte punktene til styrelinja og til punktet vi skal sjekke om er brennpunkt. Da sitter vi bare igjen med ellipsen. Styrelinjene og det oppgitte toppunktet forteller at $x = 0$ (y-aksen) og $y = 1$ er symmetriakser og at et av brennpunktene må ha x-koordinat mellom null og 4 og y-koordinat 1. Det ser hvertfall ut som det er håp. Det er flere måter å finne ut nøyaktig hvor brennpunktet er, men fordi dette er en flervalgsoppgave burde vi ha nok til å overbevise oss selv nå.

Oppgave 4: Hvilken av følgene nedenfor konvergerer **ikke** mot 1?

a) ☐ $\{\cos(1/n)\}$ b) ☐ $\left\{\dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1}\right\}$ c) ☐ $\{n\sin(1/n)\}$ d) ☒ $\left\{\dfrac{\ln n}{n}\right\}$ e) ☐ $\{1 - 0{,}2^n\}$

a) $1/n$ konvergerer mot null, og $\cos 0 = 1$. b) del med n^2 over og under brøkstreken... c) få n-en under en brøkstrek og bruk hva du vet om $\sin x/x$ når x går mot null. d) bruk for eksempel l'Hôpital på $\ln x/x$ og se at dette går mot null. e) $|0{,}2| < 1$ så det siste leddet går mot null og følgen mot 1.

Oppgave 5: En av rekkene nedenfor **divergerer**, hvilken?

$$\text{a)}\square\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n}{n4^n}\quad \text{b)}\boxed{\text{x}}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n}{n^3}\quad \text{c)}\square\sum_{n=2}^{\infty}e^{-n}\quad \text{d)}\square\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}\quad \text{e)}\square\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$$

a) sammenlign med $\sum(3/4)^n$ som er en geometrisk rekke som konvergerer. b) bruk din favorittmetode til å vise at leddene ikke konvergerer mot null. c) kanskje letter å se hvis vi skriver $e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$. d&e) kan sammenlignes med $\sum(1/n^2)$ (det er litt mer pes på e) enn på d))

Oppgave 6: Hvilket av følgende utsagn er **usant**?

a)☐ Hvis følgen $\{a_n\}$ er avtagende og har en nedre skranke, så konvergerer følgen.

b)☐ Hvis følgen $\{a_n\}$ konvergerer så, har den en øvre skranke.

c)☐ Hvis følgen $\{a_n\}$ konvergerer, så må også følgen $\{|a_n|\}$ konvergere.

d)☒ Hvis følgen $\{|a_n|\}$ konvergerer, så må også følgen $\{a_n\}$ konvergere.

a) er det samme som voksende med øvre skranke, bare snudd på hodet. b) Hvis en følge konvergerer vil den etterhvert komme veldig nærme tallet den konvergerer mot, la oss kalle det L. Mer konkret vil det være et "tidspunkt" N slik at $a_n \leq L+1$ når $n \geq N$. Se på alle leddene i følgen som kom før dette (de $N-1$ første). Fordi dette er en endelig liste med tall er det lett å finne et "tak" for disse, la oss si M. Hvis jeg nå tar S som maksimum av M og $N+1$ så vil alle tallene i følgen være mindre enn S, altså har følgen en øvre skranke. (Tilsvarende har vi også en nedre skranke.) c) Hvis $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ så vil $\lim_{n\to\infty}|a_n| = |a|$. d) Her er et av de enkleste eksemplene på at denne på standen er feil: $-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$. Tar vi absoluttverdi av leddene får vi $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$.

Oppgave 7: Bruk et Taylorpolynom til $f(x) = \sin x$ for å finne et estimat for $\sin(1/1000)$ som har en feil mindre enn 10^{-12}. (Du kan gi svaret som en brøk hvis du vil.) Svaret skal begrunnes, og skal gis på plassen nedenfor.

Vi bruker Taylorpolynom om $x = 0$. Vi finner først ut hvilken grad vi trenger på Taylorpolynomet: For en gitt grad er feilleddet gitt ved

$$E_n(1/1000) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{1000}-0\right)^{(n+1)} = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!1000^{(n+1)}}$$

der $0 \leq s \leq 1/1000$. Vi vet at $f^{(n+1)}(x)$ er enten $\pm\cos x$ eller $\pm\sin x$. Dermed har vi alltid $|f^{(n+1)}(s)| \leq 1$ så

$$|E_n(1/1000)| \leq \frac{1}{(n+1)!1000^{(n+1)}}.$$

Vi ser at $n = 2$ ikke gir oss det estimatet vi trenger, men $n = 3$ gir $|E_3(1/1000)| \leq 10^{-12}/24$. $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$ og $f'''(x) = -\cos x$ så $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$ og $f'''(0) = -1$, så tredjegrads Taylorpolynomet til $f(x) = \sin x$ om $x = 0$ er

$$P_3(x) = x - x^3/6 \qquad \text{og} \quad P_3(1/1000) = \frac{1}{1000} - \frac{1}{6}\frac{1}{1000^3} = \frac{6\cdot 1000^2 - 1}{6\cdot 1000^3} = \frac{5999999}{6000000000}$$

Dermed er 5.999.999/6.000.000.000 et estimat for $\sin(1/1000)$ med feil mindre enn $10^{-12}/24$. (En liten utfordring: det er relativt lett å garantere at feilen på estimatetet er minst tusen ganger bedre enn den garantien vi har gitt.)