Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1102/MA6102 Grunnkurs i analyse II**

Faglig kontakt under eksamen: Ole Jacob Broch[a], Mathias Nikolai Arnesen[b]

Tlf: [a]91353763 , [b]41458609

Eksamensdato: 28. mai 2016

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:
Alle svar skal begrunnes. Ufullstendige svar gir delvis uttelling. Du finner et ark med formler etter oppgavene.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 Hva er eksentrisiteten til en parabel?

Finn ligningen til parabelen med styrelinje $y = -2$ og brennpunkt $B = (0, 1)$.

Oppgave 2

a) Vis at den parametriserte kurven

$$x(t) = \sqrt{2}\sin t, \quad y(t) = -2\cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

beskriver ellipsen gitt ved

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

b) Vis at buelengden av ellipsen er gitt ved integralet

$$L = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin^2 t}dt.$$

(Du trenger *ikke* å regne ut verdien av integralet).

c) Vis at buelengden av ellipsen i b) tilfredsstiller ulikhetene

$$2\sqrt{2}\pi < L < 4\pi.$$

Bruk trapesmetoden med 4 delintervaller ($\Delta x = \pi/2$) til å finne et annet estimat for L.

Oppgave 3 Finn ut om rekkene

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n}{e^{3n}} \quad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

konvergerer eller divergerer.

Oppgave 4

a) Vis at funksjonen $y(x) = x^2 + x + 1$ er en løsning av den inhomogene ligningen

$$y'' - 2y' + y = x^2 - 3x + 1.$$

b) Finn den generelle løsningen av ligningen i a).

Oppgave 5 Vis at ligningen

$$1 - e^{-x} = \frac{x}{2}$$

har nøyaktig en løsning for $x > 0$. Bruk Newtons metode i ett steg med startverdi $x_0 = 3/2$ til å finne en tilnærming til denne løsningen.

Oppgave 6 Finn Taylor-polynomet av grad 3 om punktet $a = 0$ til funksjonen

$$f(x) = (x+1)^{2/3}.$$

Regn ut en tilnærming til $2^{2/3}$ ved hjelp av Taylor-polynomet.

Oppgave 7 Bruk den geometriske rekken

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

til å finne en potensrekkeutvilking for funksjonen

$$g(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Hva er konvergensintervallet for denne rekken?

Oppgave 8 La $f_n(x)$ være summen av den endelige geometriske rekken:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Vis at følgen $\{f_n\}$ konvergerer uniformt mot funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

på intervallet $[0, 1/2]$.

FORMELARK FOR MA1102

Trigonometriske funksjoner

Identiteter:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan v$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–

Numeriske metoder

- Newtons metode: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
- Trapesmetoden: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$

Taylorrekker

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Kjeglesnitt

Ligning for kjeglesnitt med eksentrisitet $\epsilon \neq 1$ (ellipse eller hyperbel), styrelinje $x = L$ og brennpunkt i $(B, 0)$ (med $B > L$):

$$y^2 = (\epsilon^2 - 1)((x - \overline{x})^2 - a^2),$$

der $\overline{x} = \frac{B - \epsilon^2 L}{1 - \epsilon^2}$ er sentrum i kjeglesnittet og $a^2 = \left(\frac{\epsilon(B-L)}{1-\epsilon^2}\right)^2$.

For $\epsilon = 1$ (parabel) har vi

$$y^2 = 2(B - L)x + L^2 - B^2.$$