Eksamen MA1102 vår 2016 - løsningsforslag

May 31, 2016

Oppgave 1

En parabel har eksentrisitet $\epsilon = 1$. For å finne likningen til parablen med styrelinje $y = -2$ og brennpunkt $B = (0, 1)$ kan vi bruke formelen i formelsamlingen, men vær obs på at den holder når styrelinjen er parallell med y-aksen og B ligger på x-aksen. I vårt tilfelle blir vi derfor nødt til å bytte om på x og y:

$$x^2 = 2(1 - (-2))y + (-2)^2 - 1^2 = 6y + 3. \tag{0.1}$$

Alternativt kan man bruke at ethvert punkt P på parabelen tilfredstiller $|PB| = |PL|$.

Oppgave 2

a) Har at

$$\frac{x(t)^2}{2} + \frac{y(t)^2}{4} = \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1.$$

Altså ligger ethvert punkt på kurven $(x(t), y(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$, på ellipsen gitt ved $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$. Ettersom $(x(t), y(t))$ starter og slutter i samme punkt uten å gå gjennom andre punkter mer enn en gang og er kontinuerlig må kurven derfor være lik ellipsen.

b) Formelen for buelengde for en glatt parametrisk kurve er $\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$. Her er $x'(t) = \sqrt{2}\cos(t)$ og $y'(t) = -2\sin(t)$. Dermed får vi

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2\cos^2(t) + 4\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \sin^2(t)) + 2\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin^2(t)}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

c) Ettersom $0 \leq \sin^2(t) \leq 1$ for alle $0 \leq t \leq 2\pi$ med likheter bare i endelig mange punkter er

$$2\sqrt{2}\pi = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1}\,\mathrm{d}t < \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin^2(t)}\,\mathrm{d}t < \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,\mathrm{d}t = 4\pi.$$

Trapesmetoden med 4 delintervaller gir estimatet

$$L \approx \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1 + 2\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2}(1 + \sqrt{2})\pi.$$

Oppgave 3

(i) Både forholdstesten og rottesten fungerer fint her, men i dette tilfellet gir rottesten minst regning:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n n}{\mathrm{e}^{3n}}} = \frac{2}{\mathrm{e}^3} < 1,$$

og vi konkluderer med at rekken konvergerer.

(ii) Forholdstesten gir

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
&= \mathrm{e} > 1,
\end{aligned}$$

og dermed divergerer rekken.

Et "lettere" argument er å observere at for $n \geq 2$ er $n!$ et produkt av n ledd hvor alle unntatt det første er mindre enn n, hvilket betyr at $n! < n^n$ og følgelig er $\frac{n^n}{n!} > 1$ for alle $n \geq 2$. Dermed sier divergenstesten at rekken diveregerer.

Oppgave 4

a) La $y(x) = x^2 + x + 1$. Da er $y' = 2x + 1$ og $y'' = 2$. Setter vi dette inn i venstresiden av ligningen får vi:

$$y'' - 2y' + y = 2 - 2(2x + 1) + x^2 + x + 1 = x^2 - 3x + 1.$$

Vi kaller denne løsningen for y_p; partikulærløsningen.

b) Ettersom ligningen er lineær i y vil $y_h + y_p$ være en løsning for alle løsninger y_h av den homogene ligningen $y'' - 2y' + y = 0$. Derfor trenger vi å finne den generelle løsningen av denne ligningen. Den karakteristiske ligningen er

$$r^2 - 2r + 1 = 0,$$

som har bare én løsning $r = 1$. Da vet vi at alle løsningene er på formen $y = C\mathrm{e}^x + Dx\mathrm{e}^x$ for vilkårlige konstanter C og D. Dermed er den generelle løsningen til den inhomogene ligningen gitt vet

$$y = C\mathrm{e}^x + Dx\mathrm{e}^x + x^2 + x + 1.$$

Oppgave 5

Å finne løsninger til $1 - \mathrm{e}^{-x} = \frac{x}{2}$ er ekvivalent med å finne nullpunkter til $f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} - \frac{x}{2}$. For å vise at det finnes nullpunkter for $x > 0$ holder det å observere at $f(x)$ er kontinuerlig og at

$$f(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}} > 0, \quad f(2) = -\mathrm{e}^{-2} < 0.$$

Dermed må det finnes et punkt $x_0 \in (1, 2)$ slik at $f(x_0) = 0$, ettersom kontinuitet impliserer at $f(x)$ ikke kan skifte fortegn uten å være 0 i et punkt. For å bevise at det bare finnes ett ser vi på den deriverte:

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}.$$

Ser at $f'(x) > 0$ når $0 < x < \ln(2)$ og $f'(x) < 0$ når $x > \ln(2)$. Altså kan det være maksimalt ett nullpunkt for $0 < x < \ln(2)$ og maksimalt ett nullpunkt for $x > \ln(2)$ (som vi alt vet finnes i $(1, 2)$). Ettersom $f(0) = 0$ kan det ikke finnes nullpunkter i intervallet $(0, \ln(2))$ da f' har konstant fortegn på intervallet.

Newtons metode med $x_0 = 3/2$ gir

$$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1 - \mathrm{e}^{-3/2} - 3/4}{\mathrm{e}^{-3/2} - 1/2} \approx 1,5970.$$

Oppgave 6

$f(0) = 1$, $f'(0) = 2/3$, $f''(0) = -2/9$ og $f'''(0) = 8/27$. Dermed blir Taylor-polynomet av grad 3

$$T_3(x) = 1 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{81}x^3,$$

og

$$2^{2/3} = f(1) \approx T_3(1) = 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{9} + \frac{4}{81} = \frac{130}{81}.$$

Oppgave 7

La $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Da er $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ og følgelig er

$$g(x) = xf'(x).$$

Det er gitt i oppgaven at $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Ettersom rekken konvergerer for alle $x \in (-1, 1)$ er den også deriverbar for alle x i dette intervallet og vi kan derivere leddvis. Får da

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Altså er potensrekken til $g(x)$ gitt ved

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

Leddvis derivasjon av potensrekker endrer ikke konvergensradiusen, men potensielt endepunktene. Ser at for både $x = 1$ og $x = -1$ går leddene mot uendelig (i absoluttverdi), og dermed divergerer rekken for disse verdiene. Konvergensintervallet er derfor $(-1, 1)$.

Oppgave 8

Må vise at for $\varepsilon > 0$ vilkårlig finnes det $N \in \mathbb{N}$ slik for alle $n \geq N$ er

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

for alle $x \in [0, 1/2]$. For alle $x \in [0, 1/2]$ er $\frac{1}{1-x} \leq 2$ og $x \leq 1/2$, og dermed får vi at

$$|f(x) - f_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| \leq 2x^{n+1} \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{for alle } x \in [0, 1/2].$$

Ettersom høyresiden er uavhengig av punktet x og går mot 0 når $n \to \infty$ viser dette at $f_n \to f$ uniformt på $[0, 1/2]$.