Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA1102 Grunnkurs i analyse II
Vår 2015

$\boxed{1}$ Diskriminanten til kjeglesnitt er

$$0 - 1(-4) = 4$$

da er det en hyperbel. Vi skriver ligningen på formen

$$\begin{aligned} x^2 + 8x + 16 - 16 - 4y^2 &= -12 \\ (x+4)^2 - 4y^2 &= 4 \\ \frac{(x+4)^2}{4} - y^2 &= 1 \\ y^2 &= \frac{(x+4)^2}{4} - 1 \end{aligned}$$

Da, hvis vi smaligner denne ligningen med $y^2 = (\varepsilon^2 - 1)((x - \bar{x}) - a^2)$, har vi at

$$\boxed{\bar{x} = -4} \quad , \quad \varepsilon^2 - 1 = \frac{1}{4} \quad \text{og} \quad -\frac{1}{4}a^2 = -1\,,$$

så $\boxed{\varepsilon = \sqrt{\frac{5}{4}}}$ og $a = 2$.

$\boxed{2}$

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{2}\cos t + \frac{t}{2}\sin t, \frac{1}{2}\sin t - \frac{t}{2}\cos t\right) \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

og

$$\vec{v}(t) = \left(-\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\sin t + \frac{t}{2}\cos t, \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\cos t + \frac{t}{2}\sin t\right) = \left(\frac{t}{2}\cos t, \frac{t}{2}\sin t\right) \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

så

$$\boldsymbol{v}(t) = \sqrt{\left(\frac{t}{2}\cos t\right)^2 + \left(\frac{t}{2}\sin t\right)^2} = \sqrt{\frac{t^2}{4}\cos^2 t + \frac{t^2}{4}\sin^2 t} = \sqrt{\frac{t^2}{4}} = \frac{t}{2}\,.$$

Da

$$\vec{v}'(t) = \vec{a}(t) = \left(\frac{1}{2}\cos t - \frac{t}{2}\sin t, \frac{1}{2}\sin t + \frac{t}{2}\cos t\right) \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

og

$$\boldsymbol{a}(t) = \left(\frac{t}{2}\right)' = \frac{1}{2}$$

Buelengden

$$L = \int_0^1 \frac{t}{2}dt = \left[\frac{t^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}\,.$$

3 **a)** La det være det karakteristike polynomet $r^2 + 4r + 4$, som har nøyaktig en rot $r = -2$, så den generelle løsningen er på formen

$$y = C \cdot e^{-2x} + D \cdot xe^{-2x}$$

b) En bestem løsning til

$$y'' + 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}\,.$$

er på formen $y_p = (Ax + B)e^{2x}$. Vi må finne A og B.

$$y_p' = Ae^{2x} + (Ax + B)2e^{2x} = (2Ax + (A + 2B))e^{2x}$$

$$y_p'' = 2Ae^{2x} + (2Ax + (A + 2B))2e^{2x} = (4Ax + (4A + 4B))e^{2x}\,,$$

da

$$(4Ax + (4A + 4B))e^{2x} + 4(2Ax + (A + 2B))e^{2x} + 4(Ax + B)e^{2x} = (x + 1)e^{2x}$$

$$(16Ax + (8A + 16B))e^{2x} = (x + 1)e^{2x}$$

Vi har at

$$16A = 1 \qquad \text{og} \qquad 8A + 16B = 1\,,$$

og det følger at $A = 1/16$ og $B = 1/32$. Derfor har vi at

$$y_p = (\frac{1}{16}x + \frac{1}{32})e^{2x}\,.$$

Så den generelle løsning er

$$y_p + y_h = (\frac{1}{16}x + \frac{1}{32})e^{2x} + C \cdot e^{-2x} + D \cdot xe^{-2x}$$

c) La $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, og

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}\,.$$

Vi også har at

$$\frac{x^2}{1+x} = x^2 \frac{1}{1+x} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+2}$$

når $x \in (-1, 1)$.
Nå

$$x \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+2}$$

og

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n x^n$$

og

$$a_0 = 0, \qquad a_1 - a_1 = 0$$

$$na_n - a_n = (-1)^n \qquad \text{når } n \geq 2$$

og derfor

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n-1}$$

Vi har at $a_0 = y(0) = 0$ og $a_1 = y'(0) = 0$, og derfor

$$y = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^n = x \cdot \ln(1+x)$$

$\boxed{4}$ **a)** Bruk

$$g(x) = x - \frac{x - e^{-x^2}}{(x - e^{-x^2})'} = x - \frac{x - e^{-x^2}}{1 + 2xe^{-x^2}}$$

da

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

og $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0.6358$, $x_3 = 0.6529$ og $x_4 = 0.6529$.

b) $|\int_0^1 f(x)\,dx - S_n| = \frac{(1-0)^5}{180n^4} f^{(4)}(c)$ hvor $c \in [0,1]$ så

$$|\int_0^1 f(x)\,dx - S_n| \leq \frac{M_4}{180n^4} \leq 0.001$$

hvor $M_4 = max_{[0,1]}|f^{(4)}(x)| = 12$. Så

$$\frac{12}{180n^4} \leq 0.001 \Rightarrow n \geq \sqrt[4]{\frac{12}{180 \cdot 0.001}} = 2.8574\,,$$

og derfor $n = 4$, og $h = \frac{1-0}{4} = 1/4$.

$$S_4 = \frac{1/4}{3}(f(0) + 4f(1/4) + 2f(2/4) + 4f(3/4) + f(1)) = -0.2468$$

$\boxed{5}$ **a)**

$$f(x) = \ln(\cos x)$$
$$f'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}$$
$$f''(x) = -1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$
$$f'''(x) = -\frac{2\sin x}{\cos x} - \frac{2\sin^3 x}{\cos^3 x}$$
$$f^{(4)}(x) = -2 - \frac{8\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{6\sin^4 x}{\cos^4 x}$$

Så Taylor-polynomet til $f(x)$ av grad 4 om punktet 0 er

$$T_4 f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4$$

Derfor

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x) + \frac{1}{2}x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{T_4 f(x) + R_4 f(x) + \frac{1}{2}x^2}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{T_4 f(x) + \frac{1}{2}x^2}{x^4} + \lim_{x\to 0} \frac{R_4 f(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2}{x^4} + \lim_{x\to 0} \frac{R_4 f(x)}{x^4} = .$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4}{x^4} + \lim_{x\to 0} \frac{R_4 f(x)}{x^4} = -\frac{1}{12} + 0$$

b) Vi bruker forholdstesten for å finne konvergensradien.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{2^{n+1}x^{n+3}}{n+2}}{(-1)^n \frac{2^n x^{n+2}}{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2x(n+1)}{n+2} = 2x < 1$$

Da er konvergensradien $r = 1/2$, og rekken konvergerer på intervallet $(-1/2, 1/2)$. Vi må sjekke endepunkter: Først $x = 1/2$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n (1/2)^{n+2}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4(n+1)}$$

som er konvergent (det er en alternende rekke), og $x = -1/2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n (-1/2)^{n+2}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n+2} \frac{1}{4(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4(n+1)}$$

endpunkt som er divergent. Derfor er konvergensområ $(-1/2, 1/2]$.
For å fine summen, starter vi med rekka

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{når } x \in (-1, 1)$$

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \qquad \text{når } x \in (-1/2, 1/2)$$

$$\frac{1}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n \qquad \text{når } x \in (-1/2, 1/2)$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+2x) = \int \frac{1}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n+1} x^{n+1} \qquad \text{når } x \in (-1/2, 1/2)$$

$$\frac{x}{2}\ln(1+2x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n+1} x^{n+2} \qquad \text{når } x \in (-1/2, 1/2)$$

$\boxed{6}$ Dersom $x \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - nx^2}{1 + nx^2} = -1$$

dersom $x = 0$, er $f_n(0) = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$, så

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1$$

og derfor konvergerer punktvis følgen

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{dersom } x \neq 0 \\ 1 & \text{dersom } x = 0 \end{cases}$$

Men kan ikke konvergere uniformt fordi $f(x)$ er ikke en kontinuerlig funksjon og $f_n(x)$ er kontinuerlige funksjoner.