NTNU

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i
MA1102/MA6102 Grunnkurs i analyse II

Fagleg kontakt under eksamen: Harald Hanche-Olsen

Tlf: 7359 3525

Eksamensdato: 7. august 2013

Eksamenstid (frå–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: D

Bestemt kalkulator (Citizen SR-270X eller HP 30S)

Anna informasjon:

Alle svar skal ha ei god grunngjeving (unntatt i oppgåve 1).

Ufullstendige svar gir delvis uttelling.

Du finn eit ark med formlar etter oppgåvene.

Målform: nynorsk

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Dato Sign

Merk! Studentar finn sensur i Studentweb. Har du spørsmål om sensuren din, må du kontakte instituttet. Eksamenskontoret vil ikkje kunne svare på slike spørsmål.

Oppgåve 1 I denne oppgåva (og *berre* i denne oppgåva) skal du ikkje grunngi svara dine, men berre seie om den gitte påstanden er rett eller feil. Oppgåva tel som eitt punkt.

Merk! I denne oppgåva er alltid $a_n > 0$ for alle n, men b_n behøver ikkje vere positiv. M er eit positivt tal.

i. Om $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ divergerer, så divergerer både $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

ii. Om både $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ og $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer, så divergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

iii. Om $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ divergerer og $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer, så divergerer $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

iv. Om $|b_n| \leq M$ for alle n og $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer, så konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

v. Om $a_n \leq M$ for alle n og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerer, så konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Oppgåve 2

a. Avgjer om rekkjene konvergerer eller divergerer.

i. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n \cdot n!}$$ ii. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\big(1 + (\ln n)^2\big)}$$

b. For kva x konvergerer rekkja under?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$$

For kva x konvergerer ho absolutt?

Oppgåve 3

a. Finn Taylorpolynomet av tredje grad kring $x = 1$ til funksjonen

$$f(x) = (\ln x)^2.$$

b. Bruk dette Taylorpolynomet til å rekne ut ein tilnærma verdi til integralet

$$\int_1^{1,1} (\ln x)^2 \, dx,$$

og vis at den relative nøyaktigheita til svaret er betre enn $1\,\%$.

Oppgåve 4 Finn løysinga til differensiallikninga

$$y'' - 4y' + 3y = 0 \qquad \text{med } y(0) = 0 \text{ og } y'(0) = 2.$$

Oppgåve 5 Bruk trapesmetoden til å finne verdien av integralet

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{der } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}},$$

med betre nøyaktigheit enn 0,01. Du kan rekne som kjent at $0 < f''(x) < \frac{2}{3}$ for $x \in (1, 2)$. Er talet du kjem fram til større eller mindre enn den riktige verdien av integralet?

Oppgåve 6 Rekkja

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad (|x| \leq 1)$$

er gitt. Bruk henne til å finne ei rekkje med sum

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

(Ver ekstra nøye med grunngjevinga her.) Rekn ut verdien av svaret med nøyaktigheit betre enn 1/30.

Oppgåve 7 Vis at rekkja

$$\sum_{n=0}^{\infty} x e^{-nx}$$

konvergerer for alle reelle tal $x \geq 0$, og finn summen. Konvergerer rekkja uniformt for $x \in [0, 1]$?

FORMELARK FOR MA1102

Eulers formel

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Trigonometriske funksjonar

Rekker: $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ $\qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$

Derivasjon: $(\sin x)' = \cos x$ $\qquad (\cos x)' = -\sin x$ $\qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Identitetar: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\qquad \sin x = \pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ $\qquad \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$ $\qquad \cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

Eksakte verdiar:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan v$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	—

Arcusfunksjonar

Derivasjon: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Trapesmetoden

Om f har kontinuerlig andrederivert på $[a,b]$ og $|f''(x)| \leq K$ der, så har vi

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - T_n \right| \leq \frac{K(b-a)}{12}h^2 = \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$$

der n er antall delintervall og h er lengda på disse.

Simpsons metode

Om f har kontinuerlig fjerdederivert på $[a,b]$ og $|f''''(x)| \leq K$ der, så har vi

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - S_n \right| \leq \frac{K(b-a)}{2880}h^4 = \frac{K(b-a)^5}{2880n^4}$$

der n er antall delintervall (må vere eit partal) og h er lengda på disse.

Generalisert binomialkoeffisient

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}$$

Taylors formel med restledd

$$f(b) = T_n f(b) + \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n\,dt$$