MA1102 Analyse II 2013–08–07

Løsning

Dette er versjon 2.
Si gjerne fra om du finner noen feil!
Løsningen er til tider *i overkant* kortfattet.

Oppgave 1

i. Feil. (Eksempel: $a_n = 1/n$, $b_n = 1/n^2$.)

ii. Feil. (Eksempel: $a_n = 1/n$, $b_n = 1/n^2$.)

iii. Rett. (Summen av to konvergente rekker er konvergent.)

iv. Rett. ($|a_n b_n| \le M|a_n|$ gir absolutt konvergens, og derfor konvergens.)

v. Feil. (Eksempel: $b_n = (-1)^n/n$, $a_{2k+1} = 1$, $a_{2k} = 1/k$.)

Oppgave 2

a. For den første rekken bruker vi forholdstesten:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}\cdot(n+1)!} \Big/ \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1$$

så rekken divergerer.

For den andre kan vi bruke integraltesten:

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\big(1+(\ln x)^2\big)} = \Big[\arctan \ln x\Big]_1^\infty = \frac{\pi}{2} < \infty,$$

så rekken konvergerer (det er viktig å få meg seg at integranden er en positiv og avtagende funksjon).

Alternativt kan vi bruke sammenligning med den kjente konvergente rekken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

– også den konvergent ved integraltesten.

b. Vi undersøker absolutt konvergens ved hjelp av forholdstesten:

$$\frac{\big((n+1)!\big)^2 |x|^{n+1}}{(2n+2)!} \Big/ \frac{(n!)^2|x|^n}{(2n)!} = \frac{(n+1)^2|x|}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{(n+1)\cdot|x|}{(n+\frac{1}{2})\cdot 4} \to \frac{|x|}{4}$$

når $n \to \infty$, så rekken konvergerer absolutt når $|x| < 4$, og divergerer når $|x| > 4$. Når $|x| = 4$, er forholdet i utregningen lik $(n+1)/(n+\frac{1}{2}) > 1$, så leddene vokser i absoluttverdi når n vokser, og kan derfor ikke gå mot null. Så rekken divergerer for $|x| = 4$.

Konklusjon: Rekken konvergerer absolutt for $|x| < 4$, og divergerer ellers.

Oppgave 3

a. Vi finner i tur og orden

$$\begin{array}{llll} f(x) = (\ln x)^2 & f(1) = 0 & f'(x) = \dfrac{2\ln x}{x} & f'(1) = 0 \\ f''(x) = \dfrac{2 - 2\ln x}{x^2} & f''(1) = 2 & f'''(x) = \dfrac{-6 + 4\ln x}{x^3} & f'''(1) = -6 \end{array}$$

slik at det søkte Taylorpolynomet blir

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = (x-1)^2 - (x-1)^3.$$

b. Vi deriverer en gang til, og får

$$f''''(x) = \frac{22 - 12\ln x}{x^4}$$
$$0 < f''''(x) < 22 \qquad \text{for } 1 < x < e.$$

Fra restleddsformelen får vi derfor

$$(\ln x)^2 = (x-1)^2 - (x-1)^3 + R(x), \qquad 0 < R(x) < \frac{22}{4!}(x-1)^4 = \frac{11}{12}(x-1)^4 \qquad \text{for } 1 \le x \le e.$$

Dette gir

$$\int_1^{1,1} (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{10^{-3}}{3} - \frac{10^{-4}}{4} + \int_1^{1,1} R(x)\,\mathrm{d}x, \qquad 0 < \int_1^{1,1} R(x)\,\mathrm{d}x < \frac{11 \cdot 10^{-5}}{60}.$$

Dermed er

$$\int_1^{1,1} (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x = 3{,}083\ldots \cdot 10^{-4}$$

med nøyaktighet bedre enn $1{,}8\ldots \cdot 10^{-6}$, som ganske riktig er mindre enn 1 % av $3{,}08\ldots \cdot 10^{-4}$.

Den riktige verdien av integralet er omtrent $3{,}1004 \cdot 10^{-4}$, så feilen er nokså nær feilestimatet.

Oppgave 4

Den karakteristiske ligningen $r^2 - 4r + 3 = 0$ har røtter $r = 1$ og $r = 3$, så den generelle løsningen av differensialligningen har formen $Ae^x + Be^{3x}$. Fra $y(0) = 0$ får vi $A + B = 0$, og fra $y'(0) = 2$ får vi $A + 3B = 2$. Differensen av de to ligningene gir $-2B = -2$, så $B = 1$, og $A = -B = -1$. Den søkte løsningen er $y = e^{3x} - e^x$.

Oppgave 5

Vi benytter feilestimatet for trapesmetoden i formelarket med $K = \frac{2}{3}$ og $b - a = 2 - 1 = 1$, og finner at vi må ha

$$\frac{1}{18n^2} < 0{,}01,$$

altså $18n^2 > 100$. Det gir $n \ge 3$, så vi velger $n = 3$, og får følgende tilnærming med ønsket nøyaktighet:

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \tfrac{1}{6}\big(f(1) + 2f(\tfrac{4}{3}) + 2f(\tfrac{5}{3}) + f(2)\big) = \tfrac{1}{6}(0{,}707 + 2 \cdot 0{,}490 + 2 \cdot 0{,}339 + 0{,}243) = 0{,}435$$

Det er oppgitt at $f''(x) > 0$ i integrasjonsintervallet, slik at f er konveks. Det betyr at sekantene mellom delepunktene i grafen ligger over grafen, og det gir i sin tur at trapesmetoden gir en verdi som er større enn integralet.

Den riktige verdien av integralet er $0{,}43008\ldots$.

Oppgave 6

Fra den oppgitte rekken får vi

$$\frac{\arctan t}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{2k+1} \tag{1}$$

Dette kan vi integrere leddvis, og få

$$\int_0^x \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{(2k+1)^2} \qquad \text{for } |x| < 1. \tag{2}$$

Forbeholdet $|x| < 1$ kommer fra den generelle teorien for leddvis integrasjon av potensrekker: Vi vet at rekken i (1) konvergerer uniformt for $x \in [-a, a]$ så lenge a er mindre enn konvergensradien, som er 1 i dette tilfellet.

Vi ønsker å sette inn $x = 1$ i (2). I dette tilfellet konvergerer rekken også for $x = 1$ (alternerende rekketest, eller absolutt konvergens). Ved Abels teorem er summen kontinuerlig også i endepunktet, slik at

$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 1-} \int_0^x \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 1-} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+2}}{(2k+1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}.$$

Rekken er alternerende, og leddene avtar i absoluttverdi, slik at vi kan skrive

$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} + \cdots \approx 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} = 0{,}928\ldots,$$

med feil mindre enn $1/49$.

Alternativ til bruken av Abels teorem: Vi kan vise at rekken i (1) konvergerer uniformt for $t \in [-1, 1]$, slik at den kan integreres direkte opp til $x = 1$. For absoluttverdien av feilen når vi kutter rekken etter ledd nummer $n-1$ er mindre enn

$$\frac{t^{2n}}{2n+1} < \frac{1}{2n+1} \qquad \text{for } |t| \le 1,$$

og siden det siste estimatet ikke avhenger av t og går mot null når $n \to \infty$, er konvergensen uniform.

Oppgave 7

Den oppgitte rekken er en enkel geometrisk rekke, med summen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x e^{-nx} = \begin{cases} \dfrac{x}{1-e^{-x}} & x > 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

For $x > 0$ er $0 < e^{-x} < 1$ (faktor i den geometriske rekken), som gir konvergens. Og for $x = 0$ er alle leddene i rekken null.

Videre er

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-e^{-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^{-x}} = 1$$

ved L´Hôpitals regel, så grensen er en diskontinuerlig funksjon. Siden xe^{-nx} er en kontinuerlig funksjon av x for alle n, kan ikke konvergensen være uniform.