Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i
MA1102/MA6102 Grunnkurs i analyse II

Fagleg kontakt under eksamen: Harald Hanche-Olsen

Tlf: 7359 3525

Eksamensdato: 29. mai 2013

Eksamenstid (frå–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: D

Bestemt kalkulator (Citizen SR-270X eller HP 30S)

Anna informasjon:

Alle svar skal ha ei god grunngjeving.

Ufullstendige svar gir delvis uttelling.

Du finn eit ark med formlar etter oppgåvene.

Målform: nynorsk

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgåve 1

a. For kva reelle tal x konvergerer rekkja $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$?

b. Finn summen av rekkja i **a** der ho konvergerer.

Oppgåve 2 Finn løysinga til initialverdiproblemet

$$y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Oppgåve 3 Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t}\, dt$$

for alle reelle tal x.

a. Finn Taylorrekkja til f kring 0.

b. Finn verdien av $f(1)$ med nøyaktigheit betre enn 0,001.

Oppgåve 4 Finn tilnærma verdiar av løysinga til initialverdiproblemet

$$y' = 1 + \frac{2xy}{1 + x^2}, \quad y(1) = 0.$$

i punktet $x = 2$, fyrst ved to steg med Eulers metode og dernest ved eitt steg med midtpunktsmetoden (Eulers midtpunktsmetode).

Den eksakte løysinga av initialverdiproblemet er

$$y = (1 + x^2)\left(\arctan x - \frac{\pi}{4}\right),$$

slik at $y(2) \approx 1{,}60875$ (du treng ikkje vise dette).
Kva for ei av dei to tilnærma løysingane du fann er nærmast $y(2)$?

Oppgåve 5 Ein hyperbel i planet er gitt ved likninga $3x^2 - 6x - y^2 = 0$.

Finn eksentrisiteten, brennpunkta, styrelinjene og asymptotane til hyperbelen, og teikn ei skisse av han.

Oppgåve 6 Vis at funksjonen $f(x) = x \sin x$ har nøyaktig eitt lokalt ekstrempunkt i det opne intervallet $(0, \pi)$. Ekstrempunktet (eit maksimumspunkt) ligg i nærleiken av $x = 2$. Finn ei betre tilnærming til maksimumspunktet ved å gjere eitt steg med Newtons metode anvendt på $f'(x)$.

Oppgåve 7 Det finst ei løysing på forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ til initialverdiproblemet

$$(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Finn ei rekursjonslikning for a_n, og vis at $a_n = 0$ når n er eit oddetal. Kor stor er konvergensradien til rekkja for y?

Konvergerer ho i endepunkta til konvergensintervallet?

(Spørsmålet om konvergens i endepunkta er særs vanskeleg, og gir ekstrapoeng om du får det til. Du kan få full score på oppgåva utan å svare på det. Du kan få nytte av at $\ln(1 + t) \leq t$ for alle $t > -1$.)

FORMELARK FOR MA1102

Eulers formel

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Trigonometriske funksjonar

Rekker: $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ $\qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$

Derivasjon: $(\sin x)' = \cos x$ $\qquad (\cos x)' = -\sin x$ $\qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Identitetar: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\qquad \sin x = \pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ $\qquad \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$ $\qquad \cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

Eksakte verdiar:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan v$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	—

Arcusfunksjonar

Derivasjon: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Trapesmetoden

Om f har kontinuerlig andrederivert på $[a,b]$ og $|f''(x)| \le K$ der, så har vi

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T_n\right| \le \frac{K(b-a)}{12}h^2 = \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$$

der n er antall delintervall og h er lengda på disse.

Simpsons metode

Om f har kontinuerlig fjerdederivert på $[a,b]$ og $|f''''(x)| \le K$ der, så har vi

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n\right| \le \frac{K(b-a)}{2880}h^4 = \frac{K(b-a)^5}{2880n^4}$$

der n er antall delintervall (må vere eit partal) og h er lengda på disse.

Generalisert binomialkoeffisient

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}$$

Taylors formel med restledd

$$f(b) = T_n f(b) + \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n\,dt$$