MA1102 Analyse II 2013–05–29

Løsning

Dette er versjon 1.1.
Si gjerne fra om du finner noen feil!
Løsningen er til tider *i overkant* kortfattet.

Oppgave 1

a. Forholdstesten gir at konvergensradien er 1. $x = \pm 1$ gir en divergent rekke, så rekken konvergerer for $|x| < 1$.

b. Om vi deriverer rekken leddvis får vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Den opprinnelige rekken har verdien 0 for $x = 0$, så

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Oppgave 2

Den karakteristiske ligningen $r^2 + 2r + 5 = 0$ kan skrives $(r+1)^2 + 4 = 0$, og har løsninger $r = -1 \pm 2i$. Den generelle løsningen til $y'' + 2y' + 5y = 0$ kan derfor skrives

$$y = e^{-x}(A \cos 2x + B \sin 2x).$$

Initialbetingelsen $y(0) = 0$ gir $A = 0$. Setter vi inn det og deriverer, får vi $y' = Be^{-x}(2\cos 2x - \sin 2x)$. Av initialbetingelsen $y'(0) = 1$ får vi dermed $2B = 1$. Den søkte løsningen er altså $y = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x$.

Oppgave 3

a. Vi setter inn Taylorrekken for $\cos t$ og integrerer leddvis:

$$f(x) = \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} t^{2k-1}}{(2k)!}\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k}}{(2k)! \cdot 2k}.$$

b. Vi har spesielt

$$f(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)! \cdot 2k}$$

som er en alternerende rekke med avtagende ledd, slik at feilen i en delsum alltid er mellom 0 og neste ledd. Vi har $6! \cdot 6 = 720 \cdot 6 = 4320$, så leddet med $k = 3$ har allerede absoluttverdi mindre enn 0,001. En tilnærmet verdi med ønsket nøyaktighet er

$$f(1) \approx \frac{1}{2! \cdot 2} - \frac{1}{4! \cdot 4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{96} \approx 0{,}2396.$$

Oppgave 4

Vi skriver $f(x, y)$ for høyresiden av differensialligningen.

To steg med Euler: Vi setter altså $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{3}{2}$ og $x_2 = 2$, videre $y_0 = 0$ (initialbetingelsen), og får $y_1 = y_0 + \frac{1}{2} f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}$, deretter

$$y_2 = y_1 + \tfrac{1}{2} f(x_1, y_1) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} f(\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\Big(1 + \frac{2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{9}{4}}\Big) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{19}{13} \approx 1{,}231.$$

Ett steg med midtpunktmetoden: Nå er $x_0 = 1$ og $x_1 = 2$. Vi tar et halvt steg likt det første steget med Euler, og kommer til $u_1 = \frac{1}{2}$, og setter så

$$y_1 = y_0 + 1 \cdot f(\tfrac{3}{2}, u_1) = 0 + 1 + \frac{2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{9}{4}} = \tfrac{19}{13} \approx 1{,}462.$$

Den eksakte verdien er $5(\arctan 2 - \frac{\pi}{4}) \approx 1{,}60875$. I dette tilfellet ga ett trinn med midtpunktmetoden mer enn dobbelt så god nøyaktighet som to trinn med Euler.

Oppgave 5

Vi kompletterer kvadratet og dividerer med 3, og får

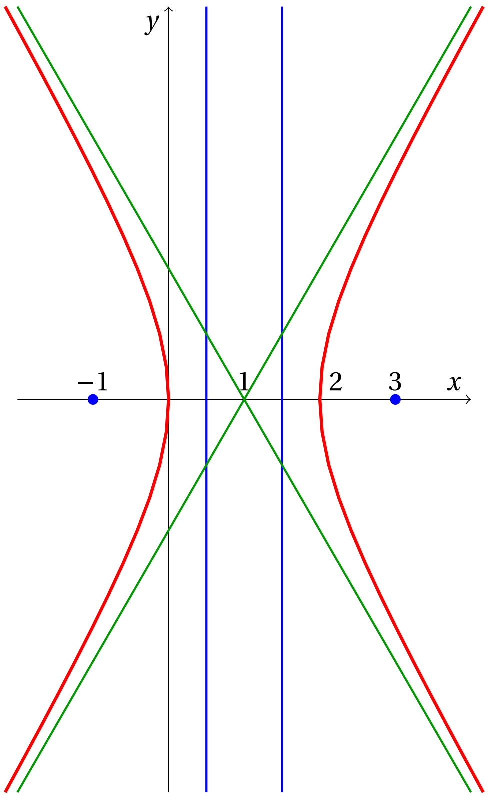
$$(x-1)^2 - \frac{y^2}{3} = 1,$$

som er standardformelen for en hyperbel med sentrum i $(1, 0)$, $a = 1$ og $b = \sqrt{3}$. Asymptotene er gitt ved

$$(x-1)^2 - \frac{y^2}{3} = 0, \quad \text{det vil si} \quad y = \pm\sqrt{3}(x-1).$$

Vi har generelt $a^2 + b^2 = (\varepsilon a)^2$, med våre tall blir $\varepsilon = \sqrt{1+3} = 2$.

Avstandene fra sentrum til styrelinje, skjæringen med x-aksen og til brennpunktet danner en geometrisk rekke med faktor $\varepsilon = 2$, altså $\frac{1}{2}$, 1 og 2 (vi skal ha a i midten, altså 1). Så vi har en styrelinje i $x = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ og et brennpunkt i $x = 1 + 2 = 3$. Den andre styrelinjen og det andre brennpunktet ligger symmetrisk om sentrum, så styrelinjene er gitt ved $x = \frac{3}{2}$ og $\frac{1}{2}$ og brennpunktene ligger i $(3, 0)$ og $(-1, 0)$.



Oppgave 6

Vi finner $f'(x) = \sin x + x\cos x$ og $f''(x) = 2\cos x - x\sin x$. Det er åpenbart at $f'(x) > 0$ for $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ og at $f''(x) < 0$ for $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Videre er $f'(\pi) = -\pi < 0$. Ved skjæringssetningen finnes et nullpunkt for f' i $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, og dette nullpunktet er entydig fordi f' avtar i dette intervallet.

Newtons metode for f':

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}.$$

Med $x_0 = 2$ får vi

$$x_1 = 2 - \frac{\sin 2 + 2\cos 2}{2\cos 2 - 2\sin 2} = 2{,}0290\ldots$$

Maksimumspunktet er i $x \approx 2.02876$, så dette er ganske bra.

Oppgave 7

Vi finner

$$\begin{aligned} y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n \\ x^2y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_nx^n \\ xy' &= \sum_{n=0}^{\infty} na_nx^n \\ -y &= -\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \end{aligned}$$

som vi summerer og setter inn i differensialligningen:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big((n+2)(n+1)a_{n+2} + \big(n(n-1)+n-1\big)a_n\Big)x^n = 0$$

som leder til rekursjonsligningen

$$a_{n+2} = -\frac{n-1}{n+2}a_n.$$

Initialbetingelsene gir $a_0 = 1$ og $a_1 = 0$, og det følger ved induksjon at $a_n = 0$ for alle odde n. Vi står igjen med

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x^{2k}, \qquad a_{2(k+1)} = -\frac{2k-1}{2k+2}a_{2k}.$$

Forholdstesten gir raskt at konvergensradien er 1.

I begge endepunktene av konvergensintervallet ($x = \pm 1$) får vi nå bare summen $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}$. Dette er klart en alternerende sum med avtagende ledd, så for å vise at summen konvergerer, må vi bare vise at $a_{2k} \to 0$. Men fra rekursjonsligningen får vi

$$(n+2)|a_{n+2}| = (n-1)|a_n| < n|a_n|,$$

for partall $n \geq 2$, slik at følgen $\big(2k|a_{2k}|\big)$ er avtagende. Vi har $2a_2 = 1$, og det følger at $2k|a_{2k}| < 1$ for $k > 1$, og spesielt vil $a_{2k} \to 0$.