Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Harald Hanche-Olsen (735 93525)

EKSAMEN I GRUNNKURS I ANALYSE II (MA1102/MA6102)

Tirsdag 13. desember 2011
Tid: 15:00 – 19:00
Sensur 10. januar 2012

Hjelpemidler (Kode D): Bestemt kalkulator (Citizen SR-270X eller HP 30S)

Alle svar skal ha en god begrunnelse.
Ufullstendige svar gir delvis uttelling.
Du finner et ark med formler etter oppgavene.

Oppgave 1 For hvilke x konvergerer rekken $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x^3/8)^n}{n \ln n}$?
For hvilke x konvergerer den absolutt?

Oppgave 2 En kurve er gitt i polarkoordinater ved $r = 2 + \cos 2\theta$.

a. Skissér kurven.

b. Finn en ligning for tangenten til kurven i punktet $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

c. Beregn arealet av området innenfor kurven.

Oppgave 3

a. Bestem konvergensradien til rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$.

Hint: $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

b. Forklar hvorfor

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k}{n} > \int_0^1 \ln x \, \mathrm{d}x$$

dersom n er et naturlig tall, og bruk dette til å vise at

$$\frac{n!}{n^n} > e^{-n}.$$

c. Bestem om rekken i **a** konvergerer i endepunktene av konvergensintervallet eller ikke.

Oppgave 4 I denne oppgaven skal du finne tre numeriske tilnærminger til integralet

$$\int_0^{1/4} \sqrt{x + x^3} \, \mathrm{d}x.$$

Vis utregningene med minst tre gjeldende siffer i **a** og **b**, og fire gjeldende siffer i **c**. (Ledende nuller teller ikke som gjeldende siffer.)

a. Beregn en tilnærming til integralet ved trapesmetoden med $n = 4$. Forklar hvorfor feilestimatet for trapesmetoden ikke er til nytte i dette tilfellet.

b. Skriv om integralet ved å substituere $x = u^2$. Beregn en tilnærming til det modifiserte integralet ved trapesmetoden med $n = 4$. Gi et øvre estimat på feilen. (Du må for all del ikke prøve å finne *beste* K i feilestimatet, det er alt for vanskelig. Finn i stedet en så god verdi for K som du klarer med enkle midler.)

c. Skriv det modifiserte integralet som en rekke ved først å finne Maclaurinrekken til integranden, og bruk rekken til å bestemme verdien av integralet med nøyaktighet bedre enn 0,0001.

Sammenlign resultatene fra **a**, **b** og **c**.

Du kan benytte rekken nedenfor uten bevis:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+v} &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n v^n \\
&= 1 + \frac{1}{2}v - \frac{1}{8}v^2 + \frac{1}{16}v^3 - \frac{5}{128}v^4 + \cdots, \quad \text{der} \\
c_0 &= 1, \quad c_1 = \frac{1}{2}, \\
c_{n+1} &= -\frac{2n-1}{2n+2}c_n \quad \text{for } n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$