Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Harald Hanche-Olsen (735 93525)

EKSAMEN I GRUNNKURS I ANALYSE II (MA1102/MA6102)

Lørdag 21. mai 2011
Tid: 09:00 – 13:00
Sensur 11. juni 2011

Hjelpemidler (Kode D): Bestemt kalkulator (Citizen SR-270X eller HP 30S)

Alle svar skal ha en god begrunnelse.
Ufullstendige svar gir delvis uttelling.
Du finner et ark med formler etter oppgavene.

Oppgave 1 For hvilke x konvergerer rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{3n}}{n^2 \cdot 8^n}$?
For hvilke x konvergerer den absolutt?

Oppgave 2 Vi ser på initialverdiproblemet for en funksjon $y = y(x)$:

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1.$$

Anvend Eulers metode med steglengde 0,2 til å finne en tilnærmet verdi for $y(0{,}6)$. Avrund y-verdien i hvert steg til to desimaler og bruk den avrundede verdien når du regner videre.

Oppgave 3 En kurve i planet er gitt på parameterform ved

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 - t^2 \\ y &= t\sqrt{1-t^2} + \arcsin(t) \end{aligned}\right\} \qquad -1 \le t \le 1.$$

a. Skissér kurven.

b. Finn lengden av kurven.

Oppgave 4

a. Funksjonen f er kontinuerlig på hele tallinjen, og er gitt ved

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \qquad \text{for } x \neq 0.$$

Benytt rekkeutviklingen

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

til å bestemme Maclaurinrekken (Taylorrekken om 0) for $f(x)$.

b. Bruk Maclaurinrekken du fant ovenfor til å vise at

$$0 < f''(x) < 1 \qquad \text{for } 0 \leq x \leq 1.$$

(Den andre ulikheten kan falle litt vanskelig.)

c. Bruk trapesmetoden til å beregne

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}\, dx$$

med nøyaktighet bedre enn 0,01. Er verdien du kommer frem til større eller mindre enn den eksakte verdien? (Det er helt i orden å bruke resultatet fra forrige punkt selv om du ikke har fått det til.)

Oppgave 5 La s være summen av rekken:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

a. Gjengi integraltesten for konvergens av rekker, og bruk den for å vise at rekken over konvergerer.

b. Vi har beregnet delsummen

$$s_{100} = \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3} = 1{,}20200740\ldots$$

som en tilnærming til s. Vis at $s > s_{100}$, og finn et tall ε slik at $s < s_{100} + \varepsilon$.

c. Finn en tilnærming til summen s som du kan garantere har en feil mindre enn 10^{-5}.