MA1102 Analyse II 2011–05–21

Løsning

Oppgave 1

Vi kan ta utgangspunkt i forholdstesten:

$$\frac{\left|(x+1)^{3(n+1)}/\big((n+1)^2\cdot 8^{n+1}\big)\right|}{\left|(x+1)^{3n}/\big(n^2\cdot 8^n\big)\right|} = \frac{(n+1)^2|x+1|^3}{8n^2} \to \frac{|x+1|^3}{8} \quad \text{når } n\to\infty,$$

så rekken konvergerer absolutt når $|x+1|^3/8 < 1$, det vil si $|x+1| < 2$, og den divergerer når $|x+1| > 2$. Når $|x+1| = 2$ er

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(x+1)^{3n}}{n^2\cdot 8^n}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

som er en konvergent rekke.

Konklusjon: Rekken konvergerer absolutt når $x \in [-3,1]$, og divergerer ellers.

Oppgave 2

Vi setter $x_n = 0{,}2\cdot n$ for $n = 0, 1, 2, 3$ og finner tilnærminger y_n til $y(x_n)$ ved å sette $y_0 = 1$ og

$$y_{n+1} = y_n + 0{,}2(x_n^2 + y_n^2) \qquad \text{for } n = 0, 1, 2.$$

Når vi avrunder mellomresultatene som oppgitt i oppgaven, får vi

n	0	1	2	3
x_n	0,0	0,2	0,4	0,6
y_n	1,00	1,20	1,50	1,98

så vi konkluderer med at $y(0{,}6) \approx 1{,}98$.

Det riktige svaret er i nærheten av 2,64, så dette er en nokså grov tilnærming.

Oppgave 3

a. Vi ser at x er en like funksjon av t, mens y er en odde funksjon av t. De to symmetriene gjør kurven symmetrisk om x-aksen.

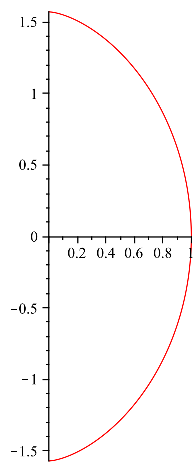
Når t vokser fra -1 til 1, vokser x fra 0 til maksimum $x = 1$ når $t = 0$, og avtar deretter til 0 igjen.

Vi finner også

$$\frac{dy}{dt} = 2\sqrt{1-t^2},$$

og legger spesielt merke til at dette er positivt, unntatt i endepunktene der den deriverte er 0. Når t vokser fra -1 til 1, vokser y fra $-\pi/2$ til $\pi/2$.

Figuren til høyre er generert med Maple. Det går kanskje ikke helt klart frem at kurven har horisontal tangent i endepunktene.



b. For buelengden s finner vi

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(-2t\,dt)^2 + 4(1-t^2)(dt)^2} = 2\,dt,$$

og dermed for den totale buelengden

$$s = \int_{-1}^{1} 2\,dt = 4.$$

Oppgave 4

a. Konstantleddet i rekken for e^x er 1, så vi får rekken for $e^x - 1$ ved å starte summen på $n = 1$:

$$f(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}.$$

Dette resonnementet gjelder bare for $x \neq 0$, men siden f er kontinuerlig må resultatet holde også for $x = 0$ (og spesielt er $f(0) = 1$).

b. Vi deriverer rekken for f to ganger:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!(n+1)}$$
$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!(n+3)}$$

Siden alle koeffisientene (inklusive konstantleddet) er positive, er det klart at $f''(x) > 0$ når $x \geq 0$. Videre er alle leddene voksende funksjoner av x for $x > 0$, så for alle $x \in [0,1]$ gjelder

$$f''(x) < f''(1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!(n+3)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2!\cdot 5} + \frac{1}{3!\cdot 6} + \cdots$$

Vi merker oss at hvert ledd fra og med det tredje er mindre enn halvparten av det foregående leddet, så vi får

$$f''(x) < \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} < 1.$$

Alternativt kan vi skrive

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!(n+3)} < \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!\cdot 3} = \frac{e}{3} < 1.$$

c. I feilestimatet for trapesregelen har vi $K = 1$ ifølge forrige punkt, og $a = 0$ og $b = 1$. Så feilen ved n delintervaller er høyst $1/(12n^2)$. Vi skal ha dette mindre enn 0,01, som holder for $n = 3$. (Dette gir øvre grense for feilen lik $1/(12 \cdot 3^2) = 1/108 \approx 0{,}00926$).

Trapesregelen for $n = 3$ gir

$$T_3 = \frac{1}{6}\big(f(0) + 2f(\tfrac{1}{3}) + 2f(\tfrac{2}{3}) + f(1)\big) = \frac{1}{6}\big(1 + 6(e^{1/3} - 1) + 3(e^{2/3} - 1) + e - 1\big)$$
$$= \frac{1}{6}(6e^{1/3} + 3e^{2/3} + e) - \frac{3}{2} \approx 1{,}323.$$

Dette er større enn den eksakte verdien, fordi f er konveks (siden $f'' > 0$).

Integralet har verdien 1,317902…

Etter en del spørsmål under eksamen er det klart at mange har slitt litt fordi integranden ikke er definert for $x = 0$. Men verdien av integralet er uavhengig av hva integranden måtte være i ett enkelt punkt, så dette skulle ikke spille noen rolle. *Trapesregelen* derimot avhenger av funksjonsverdien i enkeltpunkter. Feilestimatet avhenger også av at funksjonen er to ganger deriverbar, herunder at den må være kontinuerlig. Så det skulle vært klart at vi må bruke funksjonen f i trapesregelen for å regne ut integralet. Løsningen over er basert på dette.

Oppgave 5

a. Integraltesten sier: Dersom f er en positiv, avtagende funksjon på $[1,\infty)$, så er $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergent hvis og bare hvis $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ er konvergent.

Læreboken har også med hypotesen at f er kontinuerlig, men den hypotesen er overflødig. Den trengs bare for å sikre at f kan integreres, men monotone funksjoner er integrerbare selv om de ikke er kontinuerlige. (Ironisk nok er dette lettere å bevise enn integrerbarhet for kontinuerlige funksjoner.) Vi godtar selvsagt svar med den ekstra hypotesen!

For rekken i oppgaven benytter vi $f(x) = x^{-3}$, som oppfyller betingelsene. Integralet konvergerer, med $\int_1^{\infty} x^{-3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

b. For det første er $s > s_{100}$ fordi differensen er

$$s - s_{100} = \sum_{n=101}^{\infty} \frac{1}{n^3} > 0.$$

En figurbetraktning basert på det faktum at x^{-3} er avtagende viser

$$\sum_{n=101}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \sum_{n=101}^{\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \int_{100}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \frac{1}{2\cdot 100^2}.$$

Så vi har $s < s_{100} + \varepsilon$ der

$$\varepsilon = 5\cdot 10^{-5}.$$

c. En enkel justering av argumentet over gir

$$\sum_{n=101}^{\infty} \frac{1}{n^3} > \sum_{n=101}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \int_{101}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \frac{1}{2\cdot 101^2}$$

Vi konkluderer at

$$s \approx s_{100} + 5\cdot 10^{-5} \approx 1{,}2020574$$

der feilen ikke har større absoluttverdi enn

$$\frac{1}{2\cdot 100^2} - \frac{1}{2\cdot 101^2} = \frac{101^2 - 100^2}{2\cdot 100^2\cdot 101^2} = \frac{201}{2\cdot 100^2\cdot 101^2} \approx 10^{-6}.$$

Vi har forbedret tilnærmingen med en faktor 50 i forhold til bare å bruke delsummen.