Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Marius Irgens (73 55 02 28)

EKSAMEN I GRUNNKURS I ANALYSE II (MA1102/MA6102)

Fredag 21. mai 2010
Tid: 09:00 – 13:00 Sensur 14. juni 2010

Hjelpemidler (Kode D): Bestemt kalkulator (HP 30S eller Citizen SR-270X)

Alle svar skal ha en god begrunnelse.
Du finner et ark med formler etter oppgavene.

Oppgave 1 Finn tredjegrads Taylorpolynomet til $f(x) = x^{1/3}$ om $x = 8$.

$$P_3(x) = 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2 + \frac{5}{20736}(x-8)^3$$

Oppgave 2

a) For hvilke x konvergerer rekken $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$? Hva med rekken $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{x}{2}\right)^n$?

Den første rekken konvergerer for $-2 < x < 2$. Du kan se dette for eksempel ved å se at det er en geometrisk rekke, eller du kan bruke forholdstesten. Bruker du forholdstesten må du også sjekke endepunktene, der du ser at leddene ikke går mot null.

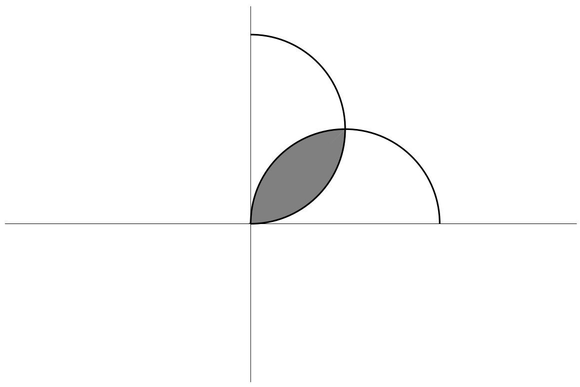
Den andre rekken har samme konvergensområde. Igjen kan du bruke forholdstesten og sjekke endepunktene, eller du kan se at dette er det dobbelte av den deriverte til den første rekken. Da vet vi at den har samme konvergensradius, og i endepunktene kan vi for eksempel bruke sammenligningstesten opp mot den første rekken.

b) Finn summen til rekken $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$.

Vi får denne rekken ved å sette $x = 1/2$ i den siste rekken over og gange med to. Bruk det du vet om summen til en geometrisk rekke og derivasjon av potensrekker. (Pass på, det er $x/2$, ikke bare x, som opphøyes i n.) Sett inn $x = 1/2$ og få $16/9$. Du kan selvfølgelig også derivere $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1}$ og sette inn $x = 1/4$.

Oppgave 3 La K være kurven gitt i polarkoordinater ved $r = 2\sin\theta,\ 0 \le \theta \le \pi/2$ og C kurven gitt ved $r = 2\cos\theta,\ 0 \le \theta \le \pi/2$. La A være området bestående av de punktene som ligger mellom K og C. Lag en skisse av kurvene, skraver området A, og finn arealet av A.

Kurvene er halvsirkler, med radius 1. (Du bør vise dette, eller argumentere for den generelle formen på kurven.) K har sentrum i $(0,1)$ og C har sentrum i $(1,0)$. Kurvene krysser når



$\theta = \pi/4$, og bruker vi det vi vet om areal for polarkurver får vi

$$\mathit{Areal} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(2\sin\theta)^2\,d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}(2\cos\theta)^2\,d\theta$$

som du for eksempel kan regne ut med dobbeltvinkelformlene på formelarket. Gjør du det riktig burde du få $\frac{\pi}{2} - 1$ som svar. (Flere innså at vi har symmetri om linja $y = x$, men husk å vise det. Det holder ikke å si “det ser ut som”. Da holder det å regne ut ett av integralene over og gange med to. Når du ser at det er halvsirkler kan du også bruke det du vet om arealet av sirkler og trekanter.)

Oppgave 4 Vi ser på funksjonen $f(x) = 2^{x^2}$ og skal estimere integralet $I = \int_{-2}^{2} f(x)dx$.

a) Bruk trapesmetoden med fire delintervall for å finne en tilnærming, T_4, til integralet.

$$T_4 = 21.$$

b) Gi et tall n slik at du kan garantere at T_n, trapesmetoden med n delintervall, avviker høyst 10^{-15} fra I. For integralet i denne oppgaven er det også mulig å avgjøre om trapesmetoden gir et overestimat, $T_n \geq I$, eller et underestimat, $T_n \leq I$. Gjør dette.

Bruk det vi har lært om derivasjon av eksponensialfunksjoner (her med base 2) og kjerneregelen til å derivere en gang, deretter dette og produktreglen for å derivere igjen, for å få, etter litt rydding,

$$f''(x) = 2 \cdot \ln 2 \cdot 2^{x^2} \left(2 \cdot \ln 2 \cdot x^2 + 1\right)$$

Der x er involvert får vi størst verdi i endepunktene. Bruker vi også at $\ln 2 < 1$ får vi $|f''(x)| < 32 \cdot 9$. Bruker vi dette og feilestimatet fra formelarket ser vi at for eksempel $n = 1{,}6 \cdot 10^9$ vil være (mer enn) stort nok. (Jeg har gjort noen grove estimater her, fordi jeg ikke har kalkulator forran meg. Du kan sikkert gi en n som er en del mindre, men den vil uansett være ganske stor.)

Oppgave 5 Hvis rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer absolutt, hva kan du da si om konvergens av rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$?

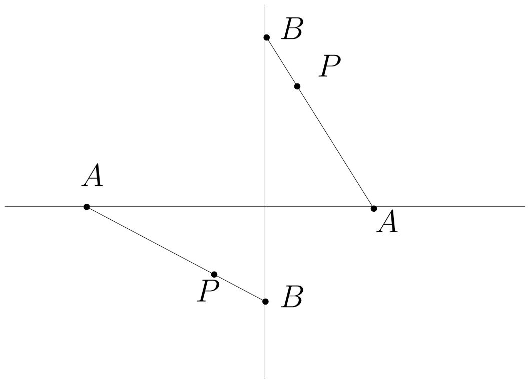
Rekken vil konvergere. (Fordi leddene er positive følger det automatisk at den konvergerer absolutt.) Vi kan se dette ved å gjøre en sammenligning med $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Husk at a_n må gå mot null, og at når $|a_n| < 1$ så har vi $a_n^2 < |a_n|$. (Det kan godt hende at ulikheten går motsatt veg i begynnelsen, så du bruker sammenligningstesten på $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$. og $\sum_{n=N}^{\infty} a_n^2$ for en tilstrekkelig stor N.)

Oppgave 6 Du er gitt en stokk med endepunkt A og B. P er et fast punkt på stokken, med avstand a til A og b til B. Stokken kan bevege seg i xy-planet, men bare slik at endepunktet A er på x-aksen og endepunktet B er på y-aksen. P tegner en kurve når stokken beveger seg mellom alle tillatte posisjoner. Gi en fullstendig karakterisering av denne kurven.

Nedenfor er en figur der stokken er tegnet inn i to ulike tillatte posisjoner.

Hvis du gir punktet P koordinatene (x, y) og leker litt med formlike trekanter kan du finne at x og y må tilfredsstille

$$\left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$$



Dette er altså en ellipse med koordinataskene som symmetriakser, og som går gjennom punktene $(\pm b, 0)$ og $(0, \pm a)$.

Flere hadde parametrisert koordinatene til P ved hjelp av vinkelen som stokken danner med en av aksene (de fleste brukte x-aksen). Dette ga nok en kortere og mer elegant løsning enn den jeg fant selv første gangen.

Generelt: Det var mange som kunne gitt en bedre argumentasjon for påstandene sine. Selv om det ser ut som kurvene i oppgave 3 er symmetriske om $y = x$, så er det ikke opplagt. Selv om du gjetter at disse kurvene kun krysser i $(0, 0)$ og $(1, 1)$ så er heller ikke dette opplagt før du har sagt noe mer. Om du setter opp en tabell med 3 eller 5 eller 40 punkter for hver kurve, så er det ikke opplagt at kurven ikke danser cha-cha-cha mellom hvert av punktene du har funnet i tabellen. Selv om kurven i den siste oppgaven er en lukket enkel kurve, så er det ikke opplagt at den er en ellipse, selv ikke om det ser sånn ut. De færreste kurver som ligner på ellipser er faktisk ellipser.... Det er heller ikke opplagt at den dobbeltderiverte i oppgave 4 er størst i endepunktene, og husk at det er absoluttverdien til f'' vi er ute etter. Her er riktignok f'' positiv, men da må du både påpeke dette og som et minimum antyde hvorfor det er sant. En skisse av grafen og inntegning av 4 trapes holder forøvrig ikke til å hevde at Trapesmetoden gir et overestimat, du må få sagt noe om at du er sikker på at denne figuren gjelder generelt (det vesentlige er konkaviteten til grafen, som du ser fra at f'' er positiv). Fra det du leser nå konkluderer du kanskje med at du må skrive en lang historie for å tilfredsstille kravene til god argumentasjon, men det er langt fra tilfellet. Det var flere gode besvarelser på 4–5 sider med normal håndskrift.