Løsningsforslag — eksamen 18/5 2009 — MA1102

1. Dette er en alternerende rekke, der leddene i størrelse går monotont mot null, så alternerenderekketesten gir oss konvergens. (Vi kan også vise konvergens ved å vise at rekken konvergerer absolutt, for eksempel ved å bruke integraltesten eller henvise til hva vi vet om p-rekker.)

   For alternerende rekker vet vi at summen s alltid ligger mellom to påfølgende delsummer, så vi må finne ut når avstanden mellom disse er mindre enn 0,01. Vi har $\frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} < 0{,}01$, så det holder å legge sammen de fire første leddene for å få et godt nok estimat for s:

$$s_4 = \frac{(-1)^1}{1^3} + \frac{(-1)^2}{2^3} + \frac{(-1)^3}{3^3} + \frac{(-1)^4}{1^4} = -1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{27} + \frac{1}{64} = -\frac{1549}{1728}.$$

2. For en parametrisert kurve vet vi at buelengden er

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

   for t mellom a og b. Vi har $\frac{dx}{dt} = 6t$ og $\frac{dy}{dt} = 6t^2$ så vi får buelengden L

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{(6t)^2 + (6t^2)^2}\, dt = \int_0^1 6t\sqrt{1+t^2}\, dt = 3\int_1^2 \sqrt{u}\, du \\ &= \Big[2u^{3/2}\Big]_1^2 = 4\sqrt{2} - 2. \end{aligned}$$

3. Vi antar at $y = e^{rx}$ er en løsning. Da får vi den tilhørende karakteristiske ligningen $r^3 + 3r^2 + 7r + 5 = 0$. Vi bruker at $r = -1$ er en rot, så $(r - (-1)) = (r+1)$ er en faktor. Dividerer vi ut denne faktoren får vi $(r^3 + 3r^2 + 7r + 5) : (r+1) = r^2 + 2r + 5$. De resterende røttene til den karakteristiske ligningen er dermed røtter til $r^2 + 2t + 5 = 0$. Med andregradsformelen får vi $r = -1 \pm 2i$ så den karakteristiske ligningen har tre ulike røtter

$$r_1 = -1, \qquad r_+ = -1 + 2i, \qquad r_- = -1 - 2i.$$

   Dette gir oss løsinger

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-x} \\ y_+ &= e^{(-1+2i)x} = e^{-x}e^{i2x} = e^{-x}(\cos(2x) + i\sin(2x)) \\ y_- &= e^{(-1-2i)x} = e^{-x}e^{-i2x} = e^{-x}(\cos(-2x) + i\sin(-2x)) = e^{-x}(\cos(2x) - i\sin(2x)) \end{aligned}$$

   Lineære kombinasjoner av disse er løsninger, så vi får for eksempel følgende reelle løsinger

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-x} \\ y_2 &= \frac{1}{2}(y_+ + y_-) = e^{-x}\cos(2x) \\ y_3 &= \frac{1}{2i}(y_x - y_-) = e^{-x}\sin(2x) \end{aligned}$$

Dette er tre lineært uavhengige reelle løsninger, så alle reelle løsninger kan skrives som en lineær kombinasjon av disse. Dermed er den generelle reelle løsningen

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^{-x}\cos(2x) + Ce^{-x}\sin(2x)$$

der A, B og C er reelle konstanter.

4. a) Intervallet har lengde 1, slik at de fire delintervallene har lengde $1/4$. Med $f(x) = 1/x$ får vi dermed

$$\begin{aligned} T_4 =& \frac{1}{4}\left(\frac{f(1)+f(5/4)}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{f(5/4)+f(3/2)}{2}\right) \\ &+ \frac{1}{4}\left(\frac{f(3/2)+f(7/4)}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{f(7/4)+f(2)}{2}\right) \\ =& \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(1 + 2\frac{4}{5} + 2\frac{2}{3} + 2\frac{4}{7} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1171}{1680} \end{aligned}$$

b) Med $f(x) = x^{-1}$ får vi $f''(x) = 2x^{-3}$. x^{-3} er en avtagende funksjon, så den tar størst verdi på $[1,2]$ i $x = 1$. $f''(1) = 2\cdot 1^{-3} = 2$ er dermed den største verdien f'' tar på $[1,2]$. f'' er positiv på $[1,2]$ så $|f''(x)| \leq 2$ på $[1,2]$.

Vi kan dermed bruke $K = 2$ i formelen nederst på det vedlagte formelarket, og får

$$\left|\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - T_4\right| \leq \frac{2(2-1)^3}{12\cdot 4^2} = \frac{1}{96}.$$

Dermed vet vi at den virkelige verdien til integralet avviker med høyst $1/96$ fra tallet vi regnet ut i a).

Vi kan bruke samme formelen, med n i stedet for 4, for å finne ut hvor mange delintervall vi trenger for å garantere at den utregnede trapesmetodesummen avviker fra integralet med mindre enn 10^{-6}. Sørg for at høyre side blir mindre enn 10^{-6} :

$$\begin{aligned} \left|\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - T_n\right| \leq \frac{2(2-1)^3}{12\cdot n^2} &\leq 10^{-6} \\ \frac{10^6}{6} &\leq n^2 \\ \frac{1000}{\sqrt{6}} &\leq n \end{aligned}$$

$1000/\sqrt{6} \approx 408{,}2$. Dermed vil trapesmetoden med 409 delintervall garantert gi en feil mindre enn 10^{-6}.

5. En måte å beskrive tangenten på er ved å finne stigningstallet. En måte å finne dette på er å uttrykke parabelen ved en ligning og finne dy/dx.

Hvis (x, y) er et punkt i planet er avstanden til brennpunktet $(0, a)$ lik $\sqrt{(x-0)^2 + (y-a)^2}$ og avstanden til styrelinja $y = -a$ er lik $y + a$. For at (x, y) skal være på parabelen må disse avstandene være like. Hvis vi kvadrerer avstandene får vi

$$\begin{aligned} x^2 + (y-a)^2 =& (y+a)^2 \\ x^2 + y^2 - 2ay + a^a =& y^a + 2ay + a^2 \\ x^2 =& 4ay \\ y =& \frac{x^2}{4a} \end{aligned}$$

Dermed får vi $dy/dx = x/2a$. I $P(x_0, y_0)$ har tangenten altså stigninstall

$$m = \frac{x_0}{2a}.$$

Linja gjennom P og Q vil ha stigningstall

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2y_0}{x_0} = \frac{2\frac{x_0^2}{4a}}{x_0} = \frac{x_0}{2a}.$$

Linja gjennom P og Q har altså samme stigningstall som tangenten, og må dermed være tangenten.

Alternativt kan vi finne ut hva Q må være: Vi har at tangenten går gjennom $P(x_0, y_0)$ og har stigningstall $m = x_0/2a$, finne et uttrykk for tangenten, finne ut når denne krysser y-aksen ved å sette $x = 0$ og finne at dette skjer i Q.

6. a) For å finne andregrads Taylorpolynom om $x = 0$ trenger jeg $y(0)$, $y'(0)$ og $y''(0)$. De to første får jeg fra initialbetingelsene, og den siste får jeg ved å sette $x = 0$ og initialbetingelsene inn i ligningen:

$$y''(0) + 0 \cdot y(0) = 0,$$

så $y''(0) = 0$. Dermed får vi

$$P_2(x) = y(0) + y'(0)(x-0) + \frac{y''(0)}{2}(x-0)^2 = 1 + x.$$

b) Vi antar at løsningen $y(x)$ er analytisk, slik at vi kan skrive $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. I såfall er dette også Taylorrekken om $x = 0$, slik at vi må finne $a_0, a_1, \ldots a_6$. Vi får

$$\begin{aligned} y'(x) =& \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \\ y''(x) =& \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} \end{aligned}$$

Setter vi dette inn i differensialligningen får vi

$$\begin{aligned}
y'' - xy &= 0 \\
\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} - x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0 \\
\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} &= 0 \\
a_2 \cdot 2 \cdot 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n &= 0 \\
2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+2}(n+2)(n+1) - a_{n-1}\right) x^n &= 0
\end{aligned}$$

For at venstre side skal bli lik høyre side må alle koeffisientene være null, så vi må ha

$$\begin{aligned}
2a_2 &= 0 \\
a_{n+2}(n+2)(n+1) - a_{n-1} &= 0
\end{aligned}$$

Den siste ligningen er det samme som

$$a_{n+3} = \frac{a_n}{(n+3)(n+2)}.$$

Fra initialbetingelsene får vi $a_0 = a_1 = 1$, så vi får

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 0 \\
a_3 &= \frac{a_0}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6} \\
a_4 &= \frac{a_1}{4 \cdot 3} = \frac{1}{12} \\
a_5 &= \frac{a_2}{5 \cdot 4} = 0 \\
a_6 &= \frac{a_3}{6 \cdot 5} = \frac{1}{180}
\end{aligned}$$

Vi ser at alle koeffisientene er mindre enn 1, så vi kan sammenligne rekken med $\sum x^n$ (ta absoluttverdier…) og konkludere at rekken konvergerer hvertfall på $(-1, 1)$. Altså er løsningen analytisk, så tallene over er de syv første koeffisientene i Taylorrekken til løsningen.

Vi så nettopp at vi hvertfall har konvergens på $(-1, 1)$, vi skal nå se at rekken konvergerer på hele tallinja. Det er sikkert mange måter vi kan gjøre det på, her er en mulighet. Vi pleier ofte å bruke forholdstesten når vi skal sjekke konvergensradien til en potensrekke, men det kan bli litt knotete her fordi vi må hoppe over alle leddene der vi har null. Vi skal se på to og to potenser som et ledd:

$$(a_0 + a_1x) + (a_3x^3 + a_4x^4) + (a_6x^6 + a_7x^7) + (a_9x^9 + a_{10}x^{10}) + \cdots$$

For å slippe litt skriving ser vi kun på positive x i første omgang. Hvis vi ser på forholdet mellom to påfølgende ledd i denne rekken ser det slik ut

$$\begin{aligned}
\frac{a_{3n+3}x^{3n+3} + a_{3n+4}x^{3n+4}}{a_{3n}x^{3n} + a_{3n+1}x^{3n+1}} &= x^3 \frac{\frac{a_{3n}}{(3n+3)(3n+2)} + \frac{a_{3n+1}}{(3n+4)(3n+3)}x}{a_{3n} + a_{3n+1}x} \\
&< x^3 \frac{\frac{a_{3n}}{(3n+3)(3n+2)} + \frac{a_{3n+1}}{(3n+2)(3n+3)}x}{a_{3n} + a_{3n+1}x} \\
&= \frac{x^3}{(3n+3)(3n+2)} \frac{a_{3n} + a_{3n+1}x}{a_{3n} + a_{3n+1}x} \\
&= \frac{x^3}{(3n+3)(3n+2)}
\end{aligned}$$

Hvis vi lar n gå mot uendelig ser vi at dette går mot null, uavhengig av hva x er, så rekken konvergerer for alle positive x. Fordi konvergensintervallet er symmetrisk om sentrum til rekken ($x = 0$ i dette tilfellet) får vi også konvergens av rekken for alle negative x, slik at konvergensområdet for rekken er hele tallinja.

Her er en alternativ, men ganske lik løsning, som en av dere leverte. I stedet for å se på to og to ledd sammen, se på de to rekkene

$$\begin{aligned}
a_0 + a_3x^3 + a_6x^6 + \ldots &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{3n}x^{3n} \quad \text{og} \\
a_1 + a_4x^4 + a_7x^7 + \ldots &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{3n+1}x^{3n+1}.
\end{aligned}$$

Hvis x er i konvergensområdet for begge disse rekkene vil x også være i konvergensområdet for rekken vi skal sjekke (hvorfor?). Vi kan bruke forholdstesten på hver av disse. For eksempel får vi

$$\frac{|a_{3(n+1)}x^{3(n+1)}|}{|a_{3n}x^{3n}|} = \frac{a_{3n+3}}{a_{3n}}|x|^3 = \frac{|x|^3}{(n+3)(n+2)}.$$

Dette går mot null, uansett hva x er, spesielt er grenesen mindre enn 1. Dermed gir forholdstesten oss konvergens for denne rekken for alle tall x. Tilsvarende argument gir oss konvergens på hele tallinja også for den andre rekken.

Det er også mulig å sammenligne rekken me Taylorrekken til $(x + 1)e^{x^3}$. Klarer du å fylle ut detaljene selv, og klarer du å se hvor motivasjonen for denne løsningsmåten kommer fra?