NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1102/6102 Grunnkurs i analyse II**

Faglig kontakt under eksamen: Eduard Ortega

Tlf: 46760087

Eksamensdato: 22. mai 2024

Eksamenstid (fra–til):

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:

- Alle 7 oppgaver teller likt ved karaktersetting.
- Lykke til!

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 6

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1

1. Vis at følger $\left\{\frac{n^2-1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ er Cauchy.
2. Let $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en følger slik at $|x_{n+1}-x_n| \leq C|x_n - x_{n-1}|$ for all n hvor $0 < C < 1$. Vis at $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ er Cauchy.

Løsning

1) Fiks ε. La $n, m \geq 1$ og anta $n \geq m$, da

$$\left|\frac{n^2-1}{n^2} - \frac{m^2-1}{m^2}\right| = \left|\frac{n^2m^2 - m^2 - m^2n^2 + n^2}{n^2m^2}\right| = \left|\frac{n^2-m^2}{n^2m^2}\right| \leq \left|\frac{2n^2}{n^2m^2}\right| = \frac{2}{m^2}\,.$$

Derfor hvis vi valge m slik at $\frac{2}{m^2} \leq \varepsilon$, so $m \geq \sqrt{2\varepsilon} := N_\varepsilon$, vi har at

$$\left|\frac{n^2-1}{n^2} - \frac{m^2-1}{m^2}\right| < \varepsilon$$

for alle $n, m \geq N_\varepsilon$. Derfor, følgen er Cauchy.

2) Først se at

$$|x_{n+1}-x_n| \leq C|x_n - x_{n-1}| \leq C^2|x_{n-1}-x_{n-2}| \leq \cdots \leq C^{n-1}|x_2 - x_1|\,.$$

Nå, la $n \geq m$, da

$$\begin{aligned}
|x_{n+1}-x_m| &= |x_{n+1}-x_n + x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - \cdots + x_{m+1} - x_m| \\
&\leq |x_{n+1}-x_n| + |x_n - x_{n-1}| + \cdots + |x_{m+1}-x_m| \\
&= C^{n-1}|x_2-x_1| + C^{n-2} + \cdots + C^{m-1}|x_2 - x_1| \\
&= \sum_{k=m-1}^{n-1} C^k |x_2 - x_1|\,.
\end{aligned}$$

But since rekker $\sum_{k=0} C^k|x_2 - x_1|$ er konvergent (fordi $0 < C < 1$) vi har at det finnes N_ε slik at $\sum_{k=m-1}^{n-1} C^k|x_2-x_1| < \varepsilon$ for alle $m \geq N_\varepsilon$. Derfor $\{x_n\}$ er Cauchy.

Oppgave 2

1. Vis at ethvert kontinuerlig funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ er konstant.
2. La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon og la $a < b$. Vis at $f([a,b])$ er et begrenset og lukket interval.

Løsning

1) La f være en kontinuerlig funksjon slik at $f(x)$ er heltall for alle $x \in \mathbb{R}$. Gitt $n \in \mathbb{N}$, la I_n være det åpen intervallet $(n-1/2, n+1/2)$, derfor $f^{-1}(I_n)$ er en åpen mengde av $\mathbb{R}$ (fordi f er kontinuerlig) slik at $f^{-1}(I_n) \cap f^{-1}(I_m) = \emptyset$ for $n \neq m$. Derfor vi har at $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^{-1}(I_n)$ og gitt $k \in \mathbb{N}$ vi har at $f^{-1}(I_k) = \mathbb{R} \setminus \{\bigcup_{n \neq k} f^{-1}(I_n)\}$, så $f^{-1}(I_k)$ er også lukket. Men bare $\mathbb{R}$ og $\emptyset$ er mengder av $\mathbb{R}$ som er åpen og lukket samtidig. Derfor det fines bare et k slik at $f^{-1}(I_k) = \mathbb{R}$ og resten er $\emptyset$. Så $f(x) = k$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

2) Siden $[a,b]$ er en lukket og begrenset interval det er også kompakt. Derfor siden f er kontinuerlig det finnes en maksimal verdien d og en minimal verdi c av funksjonen. Derfor $f([a,b]) \subseteq [c,d]$. Endelig på grunn av Bolzanos teorem dor ethvert $e \in [c,d]$ det finnes $x \in [a,b]$ slik at $f(x) = e$, så $f([a,b]) = [c,d]$.

Oppgave 3

1. Finn løsningen av differensialligningen

$$y'' + 2y' + y = 0\,.$$

2. Finn løsningen av differensialligningen med initialbetingelser

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 2x + 4 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

Løsningen

1) Først vi må finne nullpunkter av karakterisk ligning $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ som er dobbel rot $\lambda = -1$, derfor alle løsninger er på formen

$$y = Ae^{-x} + Bxe^{-x}\,,$$

for $A, B \in \mathbb{R}$.

2) Vi må finne en løsning av $y'' + 2y' + y = 2x + 4$, som må være på formen $y_p(x) = Cx + D$, og siden $y_p' = C$ og $y_p'' = 0$, vi har at

$$0 + 2C + (Cx + D) = 2x + 4\,,$$

og derfor $C = 2$ og $2C + D = 4$, og så $D = 0$. Så vi har at $y_p = 2x$. Da løsningen må være på formen

$$y = 2x + Ae^{-x} + Bxe^{-x}\,.$$

Siden $y(0) = 1$ vi har at $1 = 0 + A + 0B = A$, og siden $y' = 2 - e^{-x} + Be^{-x} - Bxe^{-x}$ og $y'(0) = 0$ vi har at $0 = 2 - 1 + B - 0$ og derfor $B = -1$. Da løsningen er

$$y = 2x + e^{-x} - xe^{-x}\,.$$

Oppgave 4

1. Vis at $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$. Hint: Bruk at $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.
2. Finn alle komplekse tall z som tilfredsstiller $z^3 = 8 + 8i$.

Løsningen

1) Vi har at $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$, derfor

$$\sin^2 x = \left(\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right)^2 = \frac{1}{-4}((e^{ix})^2 + (e^{-ix})^2 - 2e^{ix}e^{-ix})$$

$$= \frac{1}{-4}(e^{i2x} + e^{-i2x} - 2) = \frac{1}{-4}(2\cos 2x - 2) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\,.$$

2) Først, vi skriver $8+8i$ i polar form. Vi har at $|8+8i| = 8\sqrt{2}$ og $arg(8+8i) = \pi/4$. Derfor løsninger er

$$z_1 = 2\sqrt[6]{2}e^{i\pi/12}\,, \qquad z_2 = 2\sqrt[6]{2}e^{i9\pi/12} \qquad \text{og} \qquad z_3 = 2\sqrt[6]{2}e^{i17\pi/12}\,.$$

Oppgave 5 Fin konvergensområde av de følgende potensrekkene. Begrunn ditt svar.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n n^2} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n\sqrt{n}}\,.$$

Løsningen

a) Vi bruker forholdstest. Da

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{x^n}{\sqrt{n}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right| = |x|\,.$$

Derfor rekka konvergere når $|x| < 1$ og divergerer når $|x| > 1$. Når $x = 1$ rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergerer og når $x = -1$ rekka $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergerer (alternerende rekka). Derfor konvergensområdet er $[-1, 1)$.

b) Vi bruker forholdstest. Da

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)^2}}{\frac{x^n}{5^n n^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{xn^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{5}\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{|x|}{5}\,.$$

Derfor rekka konvergere når $|x| < 5$ og divergerer når $|x| > 5$. Når $x = 5$ rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerer og når $x = -5$ rekka $\frac{(-1)^n}{n^2}$ konvergerer (alternerende rekka). Derfor konvergensområdet er $[-5, 5]$.

c) Vi bruker forholdstest. Da

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{4^{n+1}\sqrt{n+1}}}{\frac{x^n}{4^n\sqrt{n}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x\sqrt{n}}{4\sqrt{n+1}}\right| = \frac{|x|}{4}\,.$$

Derfor rekka konvergere når $|x| < 4$ og divergerer når $|x| > 4$. Når $x = 4$ rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergerer og når $x = -4$ rekka $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergerer (alternerende rekka). Derfor konvergensområdet er $[-4, 4)$.

Oppgave 6 Utfør 3 iterasjoner av Newtons metode for å finne roten av funksjonen $f(x) = x\cos x - x^2$ i interval $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. Bruk bare 4 desimaler i beregninger. Hint: bruk $x_0 = 1$.

Løsningen

Vi har at $f'(x) = \cos x - x\sin x - 2x$ so vi definerer

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x\cos x - x^2}{\cos x - x\sin x - 2x} = \frac{x\cos x - x^2 \sin x - 2x^2 - x\cos x + x^2}{\cos x - x\sin x - 2x}$$

$$= \frac{-x^2 \sin x - x^2}{\cos x - x\sin x - 2x}\,.$$

Vi starter med $x_0 = 1$, så $x_1 = \frac{-\sin 1 - 1}{\cos 1 - \sin 1 - 2} = 0.8002$,

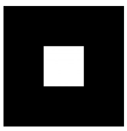
$$x_2 = \frac{-(0.8002)^2 \sin 0.8002 - (0.8002)^2}{\cos 0.8002 - 0.8002 \sin 0.8002 - 2(0.8002)} = 0,744\,,$$

og

$$x_2 = \frac{-(0,744)^2 \sin 0,744 - (0,744)^2}{\cos 0,744 - 0,744 \sin 0,744 - 2(0,744)} = 0,7391\,.$$

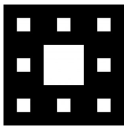
Oppgave 7 (Sierpinski teppe) Anta at den følgende firkant har areal 1.

1. Del opp firkanten i ni like store delkvadrater og fjern den sentrale firkanten.



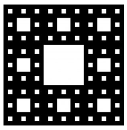
Regn ut arealet av denne figuren.

2. Del opp igjen hver av de gjenværende firkantene i ni like firkanter og fjern den sentrale firkanten.



Regn ut arealet av denne figuren.

3. Del opp igjen hver av de gjenværende firkantene i ni like firkanter og fjern den sentrale firkanten.



Regn ut arealet av denne figuren.

4. Sierpinski-teppet er figuren etter gjenta prosessen ovenfor uendelig mange ganger. Regn ut arealet av Sierpinski-teppet.

Løsningen

1) $A_1 = 1 - 1/9 = 8/9$.

2) $A_2 = 1 - 1/9 - 8(1/9)^2$

3) $A_3 = 1 - 1/9 - 8(1/9)^2 - 8^2(1/9)^3$

4) Dersom A_n er areal av figuren etter n-iterasjoner vi har at $A_n = 1 - 1/9 - 8(1/9)^2 - 8^2(1/9)^3 - \cdots - 8^{n-1}(1/9)^n = 1 - \frac{1}{9}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{8}{9}\right)^k$. Derfor arealet av Sierpinski-teppet er

$$1 - \frac{1}{9}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^k = 1 - \frac{1}{9}\frac{1}{1-\frac{8}{9}} = 1 - \frac{1}{9}\frac{1}{\frac{1}{9}} = 1 - 1 = 0\,.$$

Numeriske metoder

- Newtons metode: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
- Eulers metode: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$
- Eulers midpunktsmetode: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n))$.

Maclaurinrekker

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad -1 < x < 1\,.$$

Eulers formel

$$\cos\theta + i \sin\theta = e^{i\theta}$$