Oppgave 1 Hvilke av følgende utsagn er korrekte? Svar med *Sann* eller *Usann*. Begrunnelse trengs ikke på denne oppgaven.

1. Mengden
$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, 1\right]$$
er en lukket delmengde av $\mathbb{R}$.

2. Mengden $B = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ er tellbar.

3. La $(K_i)_{i=1}^{\infty}$ være en uendelig familie av kompakte delmengder av $\mathbb{R}$. Da $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ er alltid en kompakt delmengde av $\mathbb{R}$.

4. La $(K_i)_{i=1}^{\infty}$ være en uendelig familie av kompakte delmengder av $\mathbb{R}$. Da $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ er alltid en kompakt delmengde av $\mathbb{R}$. .

5. Ethvert Cauchyfølge av punkter på intervallet $(0,1)$ konvergerer mot et punkt på intervallet $[0,1]$.

6. Ethvert Cauchyfølge av irrasjonale tall konvergerer alltid mot et irrasjonal tall.

7. For ethvert kontinuerlig funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mengden $f^{-1}([0,1]) := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [0,1]\}$ er en lukket delmengde av $\mathbb{R}$.

8. For ethvert kontinuerlig funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mengden $f^{-1}([0,1]) := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [0,1]\}$ er en kompakt delmengde av $\mathbb{R}$.

9. For ethvert kontinuerlig funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mengden $f([0,1]) := \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in [0,1]\}$ er en kompakt delmengde av $\mathbb{R}$.

10. For ethvert kontinuerlig funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og Cauchyfølge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ av $\mathbb{R}$ følgen $(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$ er også en Cauchyfølge av $\mathbb{R}$.

Oppgave 2

1. La $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ være en Cauchyfølge av $\mathbb{R}$. Vis at summen $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$ er konvergent. Begrunn ditt svar.

2. LA $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ være en begrenset følge av $\mathbb{R}$. Vis at summen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ er absolutt konvergent. Begrunn ditt svar.

3. Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ er

   a) divergent, eller
   b) betinget konvergent, eller
   c) absolutt konvergent.

   Begrunn ditt svar.

4. Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ er

   a) divergent, eller
   b) betinget konvergent, eller
   c) absolutt konvergent.

   Begrunn ditt svar.

5. Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\frac{2\pi}{2})}{n}$ er

   a) divergent, eller
   b) betinget konvergent, eller
   c) absolutt konvergent.

   Begrunn ditt svar.

Oppgave 3 Finn alle komplekse tall som tilfredstiller ligningen $z^6 + z^3 + 1 = 0$. Hint: bytt $w = z^3$ og løs den andre graden ligningen.

Oppgave 4 La $f_n(x) = \frac{n}{n+1}e^{-nx}$. Bestem funksjonen $f(x)$ slik at følgen $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerer punktvis mot $f(x)$ på intervallet $I = [0, 1]$. Konvergerer $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uniformt mot $f(x)$ på intervallet $I = [0, 1]$? Begrunn ditt svar.

Oppgave 5 Finn potensrekker av formen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ av de følgende funksjonene. Bestem konvergensradien og konvergensområde også.

1. $f(x) = \ln(2x^2 + 1)$ med $a = 0$.
2. $f(x) = xe^{-\frac{x}{3}}$ med $a = 0$.
3. $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ med $a = 1$.

Oppgave 6 Utfør 3 iterasjoner av Newtons metode for å finne roten av funksjonen $f(x) = 2x - \cos x$. Hint: bruk $x_0 = 0$.

Oppgave 7

1. Finn løsningen av differensialligningen med initialbetingelser

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = e^{-2x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

2. Finn potensrekkeløsningen $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ av differensialligningen med initialbetingelser

$$\begin{cases} y'' - 2xy' - 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

Numeriske metoder

- Newtons metode: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
- Eulers metode: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$
- Eulers midpunktsmetode: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n))$.

Maclaurinrekker

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad -1 < x < 1\,.$$

Eulers formel

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$