BEVIS FOR ALGEBRAENS FUNDAMENTALTEOREM

Vi vil vise Theorem 1.32 på side 17 i Krantz ved motsigelse. Så la P være et polynom av grad $n \geq 1$, og anta at det ikke finnes noen z slik at $P(z) = 0$. Vi kan skrive $P(z)$ som

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0,$$

hvor $a_n \neq 0$. Vi kan uten tap av generalitet anta at $a_n = 1$. Hvis $|z| = R$, har vi

$$|P(z)| \geq R^n (1 - |a_{n-1}| R^{-1} - \cdots - |a_0| R^{-n}).$$

Det betyr at $\min_{|z|=R} |P(z)|$ (som eksisterer fordi $|P(z)|$ er kontinuerlig) går mot ∞ når $R \to \infty$, og den kontinuerlige funksjonen $R \mapsto \min_{|z|=R} |P(z)|$ har derfor et minimum[1], si for $R = R_0$. Det finnes derfor et tall z_0 med $|z_0| = R_0$ slik at $|P(z)| \geq |P(z_0)|$ for alle komplekse tall z.

Per antagelse har vi $P(z_0) \neq 0$, og vi kan derfor sette

$$Q(z) := \frac{P(z + z_0)}{P(z_0)},$$

som er et polynom av grad n med $Q(0) = 1$ og $|Q(z)| \geq 1$ for alle z. Siden Q har grad n, finnes det et positivt heltall k, $1 \leq k \leq n$, slik at

$$Q(z) = 1 + b_k z^k + \cdots + b_n z^n, \quad b_k \neq 0.$$

Vi kan skrive b_k på polarform, altså $b_k = |b_k| e^{i t_k}$. Om vi nå setter $\theta = (\pi - t_k)/k$, får vi

$$b_k e^{ik\theta} = -|b_k|.$$

For alle $r > 0$ får vi dermed

$$|Q(re^{i\theta})| \leq 1 - r^k (|b_k| - |b_{k+1}| r - \cdots - |b_n| r^{n-k}).$$

Om vi velger r liten nok, ser vi at vi dermed har $|Q(re^{i\theta})| < 1$ som er i strid med at $|Q(z)| \geq 1$ for alle z. Vi har nådd en motsigelse og konkluderer at $Q(z_0) = 0$.

Bemerkning: Merk at siste del av argmumentet vårt etablerer følgende grunnleggende prinsipp: Hvis $P(z_0) \neq 0$, er z_0 verken et lokalt maksimumspunkt eller et lokalt minimumspunkt for $|P(z)|$. Vi vil i MA2106 lære dette faktum å kjenne som en konsekvens av maksimumsprinsippet for harmoniske funksjoner.

Date: 11. januar 2022.

[1] Her holder vi oss kun til funksjoner av reelle variable (først $\theta \mapsto |P(Re^{i\theta})|$ og deretter $R \mapsto \min_{|z|=R} |P(z)|$), men det er nok mer naturlig å appellere direkte til et såkalt kompakthetsargument: Siden $z \mapsto |P(z)|$ er en kontinuerlig funksjon, vil det finnes et punkt z_0 i enhver lukket disk $|z| \leq R$ slik at $|P(z_0)| \leq |P(z)|$ for $|z| \leq R$. Ved ovenstående argument må det altså finnes et globalt minimumspunkt for $|P|$.