STIRLINGS FORMEL

Vi har sett at følgende ulikhet er en konsekvens av potensrekkerepresentasjonen til eksponentialfunksjonen:

$$n! \geq \frac{n^n}{e^n}.$$

Vi skal nå utlede Stirlings klassiske formel som gir mer presis informasjon om størrelsen på $n!$ når n er stor:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}} = 1. \tag{1}$$

Formelen kan gjøres mer presis (som vi skal se i vår utledning), og den kan også utvides til en asymptotisk formel for gamma-funksjonen som for $s > 0$ er definert ved

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx. \tag{2}$$

Ved delvis integrasjon n ganger ser vi at $\Gamma(n+1) = n!$. Det er mulig å ta utgangspunkt i integralet i (2) når man skal utlede (1). Vi skal imidlertid delvis følge Adams & Essex (se side 551), blant annet fordi det gir oss nok en mulighet til å se nytten av vår variant av Eulers summasjonsformel (se notat til forelesningen 28.01.). Vi begynner med en påminnelse om den: La f være deriverbar på $[1,\infty)$. Ved delvis integrasjon har vi

$$f(m) = \int_{m-1}^m f(x)dx + \int_{m-1}^m f'(x)(x-(m-1))dx.$$

Om vi nå summerer denne formelen fra $m = 2$ til $m = n$, får vi

$$\sum_{m=2}^n f(m) = \int_1^n f(x)dx + \int_1^n f'(x)(x-[x])dx,$$

hvor $[x]$ er heltallsdelen av x. Setter vi $f(x) = \ln x$, gir denne formelen at

$$\ln(n!) = \sum_{m=2}^n \ln m = \int_1^n \ln x\, dx + \int_1^n \frac{(x-[x])}{x} dx.$$

Det første integralet gir $n\ln n - n + 1$; i det andre integral legger vi til og trekker fra $1/2$ i telleren slik at vi får

$$\ln(n!) = n\ln n - n + \ln\sqrt{n} + 1 + \int_1^n \frac{(x-[x]-1/2)}{x} dx.$$

Hvorfor la vi til og trakk fra $1/2$ her? Jo, poenget er at funksjonen $g(x) = x - [x] - 1/2$ vil ha middel 0 på ethvert intervall av lengde 1, det vil si $\int_y^{y+1} g(t)dt = 0$ for alle y. Dermed er $\int_1^x g(t)dt$ en begrenset funksjon (faktisk $\leq 1/4$ i absoluttverdi), og vi ser ved delvis integrasjon at det uegentlige integralet

$$\int_1^\infty \frac{(x-[x]-1/2)}{x}\,dx$$

eksisterer. Om vi setter

$$C = 1 + \int_1^\infty \frac{(x-[x]-1/2)}{x}\,dx,$$

får vi nå

$$\ln(n!) = n\ln n - n + \ln\sqrt{n} + C - \int_n^\infty \frac{(x-[x]-1/2)}{x}\,dx.$$

Ved delvis integrasjon får vi at det siste integralet i absoluttverdi høyst er en konstant ganget med $1/n$. Vi har dermed fått en presis variant av Stirlings formel (1)—om vi bare kan vise at $C = \ln(\sqrt{2\pi})$.

Adams & Essex viser sistnevnte interessante formel[1] på følgende måte: Når vi nå *vet* at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{n}n^n e^{-n}} = e^C,$$

har vi også

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{\sqrt{2n}(2n)^{2n}e^{-2n}} = e^C$$

og dermed

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{2^{2n}\sqrt{2}}{\sqrt{n}} = e^C.$$

Men siden

$$\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = \frac{2\cdot 4\cdots 2(n-1)\cdot 2n}{1\cdot 3\cdots(2n-3)\cdot(2n-1)},$$

ser vi at problemet koker ned til å løse oppgave 38 (c) på side 340 i Adams & Essex. Denne oppgaven inngår som del av Øving 9.

[1] La oss for å pirre nysgjerrigheten litt nevnte at denne formelen forteller oss at $\zeta'(0) = -\ln(\sqrt{2\pi})$, hvor $\zeta(s)$ er Riemanns zeta-funksjon.