

## FUNKSJON SOM IKKE ER REELL-ANALYTISK

Vi skal i denne oppgaven se på funksjonen

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-1/x}, & x > 0. \end{cases}$$

- (a) Vis ved induksjon at  $f^{(n)}(0) = 0$  for all  $n \geq 0$ . (Hint: Begynn med å vise at det for hver  $k \geq 0$  finnes et polynom  $P_k$  slik at  $f^{(k)}(x) = P_k(1/x)e^{-1/x}$  når  $x > 0$ .)
- (b) Beregn

$$\int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

for alle positive heltall  $n$ . (Hint: Se Thm. 9.20 i Krantz.)

- (c) Bruk (b) til å vise at vi for hver  $\delta > 0$  og  $n \geq 1$  har

$$\max_{0 \leq t \leq \delta} |f^{(n)}(t)| \geq e^{-1/\delta} \frac{n!}{\delta^n}.$$