OPPGAVE OM WEIERSTRASS' M-TEST OG WEIERSTRASS' KONSTRUKSJON

Vi skal lage oss vår egen versjon av en berømt konstruksjon av Weierstrass som viser at det fins kontinuerlige funksjoner som ikke er deriverbare i et eneste punkt. Vi skal gå mye saktere frem enn det som gjøres i tilsvarende oppgave i Krantz! (Se oppgave 13 s. 193.) Vi velger oss

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} \sin(27^n x).$$

(Vi velger tallene 3 og 27 for å gi oss selv litt slingringsmonn i konstruksjonen.)

Før vi ser på detaljene, kan det være på sin plass å forklare hva planen er. Vi må som kjent vise at grensen

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

ikke eksisterer. Ideen er at vi for hvert ledd i ovenstående rekke finner en liten $h = h_n$ slik at det er bidraget fra det $n$te leddet i rekken for $f(x + h_n) - f(x)$ som dikterer størrelsen på inkrementet $f(x + h_n) - f(x)$. La oss røpe at h_n vil være av størrelsesorden 27^{-n} og at bidraget fra det $n$te leddet vil være av størrelsesorden 3^{-n}. Om vi tar dette for gitt, ser vi at brøken i (1) da "eksploderer" for $h = h_n$ når $n \to \infty$, og grensen i (1) kan dermed umulig eksistere.

Nå til detaljene:

(a) Bruk Weierstrass' M-test til å vise at f er veldefinert og representerer en kontinuerlig funksjon på $\mathbb{R}$.
(b) Forklar hvorfor f også er uniformt kontinuerlig på $\mathbb{R}$.
(c) Fra nå av er x et vilkårlig reelt tall som vi vil holde fast i resten av oppgaven. Sett $g_n(y) := |\sin(27^n x) - \sin(27^n y)|$. Påvis at maksimumsverdien m_n til g tilfredsstiller $m_n \geq 1$.
(d) La $y_n = x + h_n$ være et tall slik at $|\sin(27^n x) - \sin(27^n y)| = m_n$ og $|h_n|$ er minst mulig. Vis at $27^{-n}\pi/2 \leq |h_n| \leq 27^{-n}\pi$. (Se på grafen til $\sin t$ og overbevis deg om at det er slik! Du vil se at y_n er entydig bestemt med mindre $27^n x$ er et odde multiplum av $\pi/2$.)
(e) Bruk foregående punkt og sekantsetningen (også kjent som middelverdisetningen) til å vise at når $k < n$, har vi

$$|\sin(27^k x) - \sin(27^k y_n)| \leq \pi\, 27^{k-n}.$$

(f) Bruk foregående punkt og formelen for en endelig geometrisk sum til å vise at

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} 3^{-k} \big(\sin(27^k x) - \sin(27^k y_n) \big) \right| \leq \frac{\pi}{8} 3^{-n}.$$

Date: 4. mars 2022.

(g) Vis nå at vi på den annen side har

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} 3^{-k}\big(\sin(27^k x) - \sin(27^k y_n)\big)\right| \le \frac{1}{2} 3^{-n} \sup_{k>n} m_k.$$

(Hint: Bruk formel for geometrisk rekke!)

(h) Kan du til slutt forklare hvorfor du nå har vist at f ikke er deriverbar i x? (Du må huske kravet om at grensen i (1) må eksistere og kombinere det du kom frem til i (d), (f), (g) for å vise at dette kravet ikke kan oppfylles! For å nyttiggjøre deg punkt (g) bør du velge en følge n_k slik at $\lim_{k\to\infty} m_{n_k} = \limsup_{n\to\infty} m_n$.)