OMSTOKKING AV LEDDENE I EN KONVERGENT REKKE (RIEMANN–WEIERSTRASS' TEOREM)

Vi vil vise Theorem 3.42 på side 530 i Krantz. La oss først bli enige om hva en omstokking ("rearrangement") av leddene betyr. Vi erklærer at

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$$

er en omstokking av rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ når $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ er en bijeksjon.

La oss først vise at hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer absolutt, så konvergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ med samme sum. Sett

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} a_m \quad \text{og} \quad \sigma_n = \sum_{m=1}^{n} a_{\tau(m)}.$$

Siden τ er en bijeksjon av $\mathbb{N}$ på seg selv, må det for en hver n finnes $N \geq n$ slik at tallene $1, 2, \ldots, n$ er å finne blant tallene $1, 2, \ldots, k$ hvis bare $k \geq N$. Det betyr at

$$|\sigma_k - s_n| \leq \sum_{m>n} |a_m|$$

når $k \geq N$. Det følger av dette at følgen $\{\sigma_n\}$ konvergerer og har samme grense som $\{s_n\}$. Bruker vi vår sammenligningstest for rekker med positive ledd, ser vi at også $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ konvergerer absolutt.

La oss nå anta at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer betinget. Vi påstår at hvis c er et vilkårlig reelt tall, så kan vi velge τ slik at $\sum_{\tau(n)=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ konvergerer med grense c. For å vise dette deler vi først følgen $\{a_n\}$ i to delfølger: en følge som består av alle ikkenegative ledd og en som består av alle negative ledd. Vi kan gjøre dette ved å definere to injeksjoner $\tau_{\pm} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ slik at $a_{\tau_+(n)}$ er det $n$te ikkenegative leddet og $a_{\tau_-(n)}$ er det $n$te negative leddet i følgen vår. Merk at

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau_+(n)} = +\infty \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau_-(n)} = -\infty \tag{1}$$

siden $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer betinget. Dette gir oss følgende algoritme: La n_0 være det minst positive heltall n slik at

$$\sum_{m=1}^{n} a_{\tau_+(m)} > c.$$

La deretter n_1 være det minste tallet $n > 0$ slik at

$$\sum_{m=1}^{n_0} a_{\tau_+(m)} + \sum_{m=1}^{n} a_{\tau_-(m)} < c.$$

Date: 31. januar 2022.

Vi bruker nå induksjon til å definere henholdsvis n_{2k} og n_{2k+1}. Vi lar n_{2k} være det minste positive heltallet $n > n_{2k-2}$ slik at

$$\sum_{m=1}^{n_{2k-1}} a_{\tau_-(m)} + \sum_{m=1}^{n} a_{\tau_+(m)} > c$$

og n_{2k+1} være det minste positive heltallet $n > n_{2k-1}$ slik at

$$\sum_{m=1}^{n_{2k}} a_{\tau_+(m)} + \sum_{m=1}^{n} a_{\tau_-(m)} < c.$$

NB! Observer at (1) garanterer at tallene n_k er veldefinert.

Vår bijeksjon $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ blir dermed

$$\tau(n) = \begin{cases} \tau_+(n - n_{2k-1}), & n_{2k-2} + n_{2k-1} < n \leq n_{2k} + n_{2k-1} \\ \tau_-(n - n_{2k}), & n_{2k} + n_{2k-1} < n \leq n_{2k} + n_{2k+1}; \end{cases}$$

vi bruker her konvensjonen at $n_{-2} = n_{-1} = 0$, slik at $\tau(n)$ er veldefinert for alle n. Siden $a_n \to 0$ når $n \to \infty$, følger det nå at rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$$

konvergerer med sum c. (**Utfordring**: Overbevis deg selv om at dette er tilfelle og også at τ virkelig er en bijeksjon av $\mathbb{N}$ på seg selv.) En liten modifikasjon av ovenstående konstruksjon viser at vi også kan få til en omstokking med divergens mot $\pm\infty$.

Ovenstående bevis kan kanskje virke litt teknisk innviklet, men ideen er enkel: Vi samler de ikke-negative og negative leddene i hver sin “boks”, og så fyller vi vekselvis på med ledd fra de to “boksene” (“legger til og trekker fra”) slik at vi hele tiden får partialsummer som er så nær c som vi kan få til.

Oppgave 1. Vis at rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2+(-1)^n)n}$$

divergerer. Forklar hvorfor vi også her kan få rekken til å konvergere til et hvilket som helst reelt tall ved en passende omstokking av leddene.