Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1102 Analyse 2**

Faglig kontakt under eksamen: Simon Halvdansson

Tlf: 461 26 170

Eksamensdato: 10. juni 2022

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: A: Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Alle kalkulatorer tillatt.

Annen informasjon:
Denne prøven består av 10 delpunkt som alle teller like mye. I og med at alle hjelpemidler er tillatt, er det viktig at svarene på oppgavene er godt begrunnet.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1

a) Finn alle komplekse tall z som løser ligningen

$$z^4 + 16 = 0.$$

b) Finn den generelle (reelle) løsningen til differensialligningen $y^{(4)} + 16y = 0$.

Oppgave 2 La f være definert på $\mathbb{R}$ på følgende måte:

$$f(x) := \begin{cases} x, & x \leq \pi; \\ \sin x, & x > \pi. \end{cases}$$

Finn et åpent intervall A slik at $f^{-1}(A)$ ikke er en åpen mengde.

Oppgave 3 Anta at $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \cdots$ og at både $b_j > a_j$ for alle j og $\lim_{j\to\infty}(b_j - a_j) = 0$.

a) La x_j være et vilkårlig punkt i $[a_j, b_j]$. Vis at $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ er en Cauchy–følge.

b) Hvor mange elementer finnes det i mengden $\bigcap_{j=1}^{\infty}[a_j, b_j]$?

Oppgave 4

a) Vis at rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-\sqrt{n}x}$$

divergerer når $x \notin (-1, 1]$.

b) Observér at

$$\left| e^{-\sqrt{n}x} x^n \right| \leq \begin{cases} e^{\sqrt{n}a} a^n, & |x| \leq a; \\ e^{-\sqrt{n}a}, & a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

når $0 < a < 1$. Bruk dette til å vise at

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}x} x^n$$

er en kontinuerlig funksjon på intervallet $(-1, 1]$. (Hint: Husk Weierstrass' M-test.)

Oppgave 5

a) Anta at $a/(2\pi)$ tilhører $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Vis at

$$\sum_{n=1}^{N} \sin(an) = \frac{\sin\Big(Na/2\Big) \sin\Big((N+1)a/2\Big)}{\sin\Big(a/2\Big)}$$

når $N \geq 1$.

b) Vis at rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(an)}{\sqrt{n}}$$

konvergerer for all reelle tall a. (Hint: Delvis summasjon på integralform.)

Oppgave 6 Vi ønsker å tilnærme funksjonen $\sin(\pi x)$ med et polynom P på intervallet $[0, 10]$. Vis at hvis graden til P er mindre enn eller lik 10, så har vi

$$\max_{x \in [0,10]} |\sin(\pi x) - P(x)| \geq 1/2.$$

(Hint: Påvis at det finnes et heltall k, $0 \leq k \leq 9$, slik at $P'(x) \neq 0$ for $x \in [k, k+1)$.)