NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1102 Analyse 2**

Faglig kontakt under eksamen: Simon Halvdansson

Tlf: 461 26 170

Eksamensdato: 8. august 2022

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: A: Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Alle kalkulatorer tillatt.

Annen informasjon:
Denne prøven består av 10 delpunkt som alle teller like mye. I og med at alle hjelpemidler er tillatt, er det viktig at svarene på oppgavene er godt begrunnet.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 Finn den generelle løsningen til differensialligningen

$$y'' + 5y' + 6y = 6x^2 + 4x + 3.$$

Oppgave 2 Finn konvergensintervallet til rekken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{\ln n}}.$$

Oppgave 3

a) Finn alle komplekse tall z som løser ligningen

$$z^4 = 8 + i8\sqrt{3}.$$

(Du kan med fordel uttrykke svarene på polar form.)

b) Finn alle komplekse tall z som løser ligningen

$$\cos z = \frac{e + e^{-1}}{2}.$$

Oppgave 4 Finn en potensrekke $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ som løser initialverdiproblemet

$$y'' + xy' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

For hvilke x konvergerer rekken (begrunnelse kreves ikke)? Kan du finne et enklere uttrykk for løsningen?

Oppgave 5 La f være definert på $\mathbb{R}$ på følgende måte:

$$f(x) := \begin{cases} e^x, & x \leq 0; \\ 2 - x, & x > 0. \end{cases}$$

Finn et åpent intervall A slik at $f^{-1}(A)$ ikke er en åpen mengde.

Oppgave 6 La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en funksjon som tilfredsstiller følgende:

(i) f er to ganger deriverbar og $f''(x) < 0$ for alle x.

(ii) $f(0) = 1$ og $f(x) \leq 1$ for alle x.

a) Vis at $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$ og at ligningen $f(x) = 0$ har nøyaktig to løsninger.

b) Anta vi ønsker å finne de to løsningene til ligningen $f(x) = 0$ ved hjelp av Newtons metode. Hvilke valg av startverdi x_0 vil garantere konvergens i de to tilfellene?

Oppgave 7 Avgjør om noen av følgende to utsagn er sanne.

a) Hvis rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer absolutt, så vil summen til rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(a_n)\cos(n^2 x)$$

representere en kontinuerlig funksjon for alle reelle x.

b) Hvis rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer, så divergerer også rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos(a_n)).$$