ABELS TEOREM

Vi vil vise følgende berømte og grunnleggende resultat:

Abels teorem. *Summen til en potensrekke er en kontinuerlig funksjon på konvergensintervallet til rekken.*

La oss først illustrere hvordan vi kan bruke dette resultatet. Vi har som kjent

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

når $-1 < x < 1$. Ved testen for alternerende rekker vet vi at konvergensintervallet til rekken er $[-1, 1)$. Siden $\ln(1-x)$ er kontinuerlig i $x = -1$, gir dermed Abels teorem at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{x \to -1^+} \ln(1-x) = \ln 2.$$

Bevis for Abels teorem. Vi kan anta at rekken er på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Vi kan også uten tap av generalitet anta at konvergensradien til rekken er $R = 1$ og at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er konvergent med sum 0. Vår oppgave er dermed å vise at

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Vi setter $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ for $n \geq 0$ og erklærer at $s_{-1} = 0$ slik at vi for alle $n \geq 0$ har $a_n = s_n - s_{n-1}$. Dermed kan vi skrive

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s_{n-1}) x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

når $|x| < 1$. Siden $s_n \to 0$, kan vi, for gitt $\varepsilon > 0$, finne en N slik at $|s_n| < \varepsilon/2$ når $n \geq N$. Dermed har vi

$$\left| (1-x) \sum_{n=N}^{\infty} s_n x^n \right| \leq (1-x) \frac{|x|^N \varepsilon/2}{1-|x|} \leq \varepsilon/2$$

når $0 \leq x < 1$. På den annen side kan vi, gitt N, velge x så nær 1 at

$$\left| (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} s_n x^n \right| < \varepsilon/2.$$

Date: 4. mars 2022.

Mer presist: Dette holder hvis $|x-1| < \delta$, hvor $\delta = (\sum_{n=0}^{N-1} |s_n|)^{-1} \varepsilon/2$. Det følger nå ved trekantulikhet at

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right| < \varepsilon$$

for $0 < 1-x < \delta$. □

Det er verdt å merke seg at ovenstående bevis gir mer: Under samme antagelse som over, nemlig at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$, vil potensrekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergere uniformt på $[0,1]$. La nemlig $f(x)$ være summen av potensrekken. Da har vi at

$$\left|f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n\right| = \left|(1-x) \sum_{n=N+1}^{\infty} s_n x^n + s_N x^N\right| < \varepsilon$$

for alle x i $[0,1)$, om N som i foregående bevis er så stor at $|s_n| < \varepsilon/2$ for alle $n \geq N$. Siden vi også har at $f(1) - \sum_{n=0}^{N} a_n = -s_N$, har vi dermed

$$\left|f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n\right| < \varepsilon$$

for alle x i $[0,1]$.

Oppgave. Bruk Abels teorem til å beregne summen til rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}.$$

Hint: Hva er summen til rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)}?$$