NTNU
Kunnskap for en bedre verden

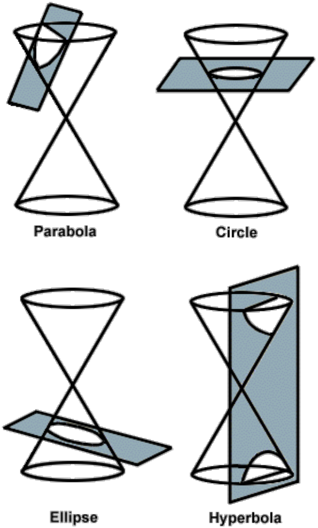
MA1102

Eduard Ortega
Department of Mathematical sciences, NTNU
uke 2

Introduksjon

1. Kjeglesnitt.
2. Vektorregning og kurver i planet.
3. Funksjonsfølger.
4. Rekker, potensrekker og Taylor-rekker.
5. Komplekse tall.
6. Differensialligninger.
7. Numeriske metoder.

Ikke-degenerert kjeglesnitt



Andregradskurve

En andregradskurve er punkter på planet $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ som tilfredstiller ligningen

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,,$$

der enten A, B eller C er ikke null.

Alle kjeglesnitt er andregradskurve, men IKKE alle andregradskurver er kjeglesnitt.

Standardligninger for ikke-degenererte kjeglesnitt

Sirkel	$x^2 + y^2 = a^2$
Ellipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Parabel	$y^2 = 4ax$
Hyperbel	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Parabel

La

1. ℓ en linje (*styrelinjen*),
2. $\mathcal{B}$ et punkt (*brennpunktet*).

$\mathcal{P} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ er et punkt på parabelen hvis

$$\boxed{|\mathcal{P}\mathcal{B}| = |\mathcal{P}\ell|}$$

$|\mathcal{P}\mathcal{B}|$ står for avstanden fra punktet $\mathcal{P}$ til punktet $\mathcal{B}$, og $|\mathcal{P}\ell|$ for korteste avstand fra punktet $\mathcal{P}$ til linjen ℓ.

Parabel

La $a > 0$, og

1. la ℓ linje med ligning $x = -a$ (*styrelinjen*),
2. la $\mathcal{B} = (a, 0)$ (*brennpunktet*).

Vi har at $\mathcal{P} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tilhører i parabelen hvis

$$\boxed{(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2}$$

så

$$\boxed{y^2 = 4ax}$$

Ellipse

Gitt to brennpunkter $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$, en ellipse er settet av alle punkter som oppfyller betingelsen at summen av avstandene fra et punkt $\mathcal{P}$ på ellipsen til $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ er konstant og lik $2a$, altså

$$|\mathcal{P}\mathcal{B}_1| + |\mathcal{P}\mathcal{B}_2| = 2a$$

Ellipse

Vi kan finne den standardlikningen for ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

der

— a er store halvakse,

— b er lille halvakse,

— $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ er eksentrisitet.

Ellipse

La

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

1. $0 < \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$ eksentrisitet,
2. la ℓ linje med ligning $x = \frac{a}{\varepsilon}$ (*styrelinjen*),
3. la $\mathcal{B} = (\varepsilon a, 0)$ (*brennpunktet*).

$\mathcal{P} \in \mathbb{R}^2$ er et punkt på ellipsen hvis

$$\boxed{|\mathcal{P}\mathcal{B}| = \varepsilon |\mathcal{P}\ell|}$$

Hyperbel

Gitt to brennpunkter $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$, en hyperbel er det settet punkter som oppfyller at differansen mellom distansene fra et hvilket som helst punkt på hyperbelen til $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ er konstant og lik $2a$, altså

$$|\mathcal{P}\mathcal{B}_1| - |\mathcal{P}\mathcal{B}_2| = 2a \qquad \text{eller} \qquad |\mathcal{P}\mathcal{B}_2| - |\mathcal{P}\mathcal{B}_1| = 2\mathrm{a}\,.$$

Hyperbel

Vi kan finne den standardlikningen for hyperbelen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

der

- a er store halvakse,
- b er lille halvakse,

Hyperbel

La

1. $0 < \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} < 1$ eksentrisitet,
2. la ℓ linje med ligning $x = \frac{a}{\varepsilon}$ (*styrelinjen*),
3. la $\mathcal{B} = (\varepsilon a, 0)$ (*brennpunktet*)

$\mathcal{P} \in \mathbb{R}^2$ er et punkt på hyperbelen hvis

$$\boxed{|\mathcal{P}\mathcal{B}| = \varepsilon|\mathcal{P}\ell|}$$