

Oppgave 1

La \mathcal{E} være ellipsen med brennpunkter $\mathcal{B}_1 = (\sqrt{5}, 0)$ og $\mathcal{B}_2 = (-\sqrt{5}, 0)$ og der summen av avstandene fra et punkt \mathcal{P} på ellipsen til \mathcal{B}_1 og \mathcal{B}_2 er konstant og lik 6.

1. Gi likningen til \mathcal{E} .
2. Finn en parametrisert kurve som går over hele \mathcal{E} .

Løsning

Vi vet at $|\mathcal{P}\mathcal{B}_1| + |\mathcal{P}\mathcal{B}_2| = 6 = 2a$, så $a = 3$. Sentrum av ellipsen er $\frac{\mathcal{B}_2 - \mathcal{B}_1}{2} = (0, 0)$. Siden vi vet at $b^2 + (\sqrt{5})^2 = a^2$, må $b^2 + 5 = 9$ og dermed $b = 2$. Likningen til \mathcal{E} er derfor

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \implies \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

En parametrisert kurve som går over hele \mathcal{E} kan være

$$\vec{r}(t) = (3 \cos(t), 2 \sin(t)) \quad \text{for } t \in [0, 2\pi].$$

Oppgave 2

La $f_n(x) = xe^{-nx^2}$ være definert på intervallet $I = \mathbb{R}$. Bestem funksjonen $f(x)$ slik at følgen $\{f_n(x)\}$ konvergerer punktvis mot $f(x)$. Bevis at $\{f_n(x)\}$ konvergerer også uniformt mot $f(x)$.

Løsning

For alle $a \in \mathbb{R}$ har vi at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} ae^{-na^2} = 0.$$

Så $f_n(x) \rightarrow f(x) = 0$ punktvis på \mathbb{R} .

For å sjekke uniform konvergens må vi beregne

$$\mathbf{d}(f_n(x), f(x)) = \max_{x \in \mathbb{R}} \{|f_n(x) - f(x)|\} = \max_{x \in \mathbb{R}} \{|f_n(x)|\}.$$

Vi må derfor finne maksimumsverdien til $|f_n(x)|$ for ulike verdier av n . Det gjør vi ved å finne kritiske punkt, altså nullpunkt til den deriverte $f'_n(x)$:

$$f'_n(x) = e^{-nx^2} - 2nx^2 e^{-nx^2} = e^{-nx^2} (1 - 2nx^2) = 0 \quad 1 - 2nx^2 = 0 \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

De kritiske punktene til $f_n(x)$ er derfor $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2n}}$. I disse punktene tar funksjonen $f_n(x)$ verdiene

$$f_n\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \pm \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-n\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-\frac{1}{2}},$$

så maksimumsverdien¹ til $|f_n(x)|$ er $\left|\pm \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-\frac{1}{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2n}}$, slik at

$$\mathbf{d}(f_n(x), f(x)) = \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-\frac{1}{2}}.$$

Dermed er

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{d}(f_n(x), f(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-\frac{1}{2}} = 0,$$

så $f_n \rightarrow f = 0$ konvergerer uniformt.

Oppgave 3

a) Bevis at rekkene

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n(n+1)}{2^n} \quad \text{og} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)2^n}{n!}$$

konvergerer.

b) Finn summen av rekkene i a).

Løsning

Vi beviser absolutt konvergens ved forholdstesten.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+1}}}{(-1)^n \frac{n(n+1)}{2^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+2)}{2}}{n} = \frac{1}{2} < 1 \quad \text{OK!},$$

og

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+2)2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(n+1)2^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+2)2}{n+1}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)2}{(n+1)^2} = 0 < 1 \quad \text{OK!}.$$

¹For å vite at maksimumsverdien til $|f_n(x)|$ oppnås i et av de kritiske punktene, må vi også merke oss at $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_n(x) = 0$.

Nå skal vi regne summen, og tar utgangspunkt i Maclaurinrekken $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ for $-1 < x < 1$. Derfor

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{for } -1 < x < 1,$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \text{for } -1 < x < 1,$$

$$\frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{2}{2+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n \quad \text{for } -2 < x < 2,$$

$$\frac{2x}{2+x} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^{n+1} \quad \text{for } -2 < x < 2,$$

$$\left(\frac{2x}{2+x}\right)' = \frac{2(2+x) - 2x}{(2+x)^2} = \frac{4}{(2+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{2^n} x^n \quad \text{for } -2 < x < 2,$$

$$\left(\frac{4}{(2+x)^2}\right)' = \frac{-8}{(2+x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n+1)}{2^n} x^n \quad \text{for } -2 < x < 2,$$

så

$$\frac{-8}{(2+1)^3} = \frac{-8}{27} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n+1)}{2^n} 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n+1)}{2^n}.$$

For den andre summen bruker vi Maclaurinrekken $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ for alle x . Vi finner at

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{for alle } x,$$

$$e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} \quad \text{for alle } x,$$

$$xe^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{n!} \quad \text{for alle } x,$$

$$(xe^{2x})' = e^{2x} + 2xe^{2x} = e^{2x}(1+2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n+1)x^n}{n!} \quad \text{for alle } x,$$

altså er

$$e^2(1+2) = 3e^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n+1)1^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n+1)}{n!}.$$

Oppgave 4

La $f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^3}$.

a) Finn Maclaurinrekken til $f(x)$.

b) Finn $f^{(5)}(0)$ (den femtederiverte til $f(x)$ i punktet $x = 0$).

Løsning

Siden vi har Maclaurinrekken $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ finner vi

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)' = \frac{-1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1}$$

$$\left(\frac{-1}{(1+x)^2}\right)' = \frac{2}{(1+x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1) x^{n-2}$$

$$\frac{2x^2}{(1+x)^3} = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1) x^n$$

$$\frac{x^2}{(1+x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n-1)}{2} x^n.$$

Nå vi vet at

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

så

$$a_5 = \frac{f^{(5)}(0)}{5!}.$$

Ved å lese av rekka vi fant i første del av oppgaven ser vi at $a_5 = \frac{(-1)^5 \cdot 5 \cdot (5-1)}{2} = \frac{(-1)^5 \cdot 5 \cdot 4}{2}$, slik at

$$f^{(5)}(0) = 5! a_5 = 120 \cdot \frac{(-1)^5 \cdot 5 \cdot 4}{2} = -1200.$$

Oppgave 5

Finn alle komplekse tall z som tilfredsstill

$$z^2 = (1 + i\sqrt{3})^3.$$

Løsning

Først regner vi ut at

$$|1 + i\sqrt{3}| = 2 \quad \text{og} \quad \arg(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3},$$

derfor er

$$|(1 + i\sqrt{3})^3| = 2^3 \quad \text{og} \quad \arg((1 + i\sqrt{3})^3) = 3\frac{\pi}{3} = \pi.$$

Det betyr at

$$|z^2| = |z|^2 = 2^3 \quad \text{og} \quad \arg(z^2) = 2\arg(z) = \pi + 2\pi k \quad \text{for } k \in \mathbb{Z},$$

og derfor

$$|z| = \sqrt{8} \quad \text{og} \quad \arg(z) = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \text{for } k \in \mathbb{Z}.$$

Det er bare to tilfeller for $\arg(z)$, nemlig $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ og $\theta_2 = \frac{3\pi}{2}$. Derfor er løsningene

$$z_1 = \sqrt{8}(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})) = \sqrt{8}i \quad \text{og} \quad z_2 = \sqrt{8}(\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2})) = -\sqrt{8}i.$$

Oppgave 6

a) Finn løsningen av differensiallikningen

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

b) Finn løsningen av differensiallikningen

$$y'' + 2y' + 2y = \sin(2x),$$

med initialbetingelser $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$.

Løsning

Den karakteristiske ligningen er $r^2 + 2r + 2 = 0$, med røtter $r_1 = -1 + i$ og $r_2 = -1 - i$. Da er løsningene på formen

$$y_h(x) = e^{-x}(A \cos(x) + B \sin(x)).$$

Nå tipper vi at en løsning av $y'' + 2y' + 2y = \sin(2x)$ er på formen

$$y_p(x) = C \cos(2x) + D \sin(2x).$$

Det gir at

$$y_p'(x) = -2C \sin(2x) + 2D \cos(2x) \quad \text{og} \quad y_p''(x) = -4C \cos(2x) - 4D \sin(2x),$$

så når vi setter y_p inn i differensialligningen får vi

$$\begin{aligned} -4C \cos(2x) - 4D \sin(2x) + 2(-2C \sin(2x) + 2D \cos(2x)) + 2(C \cos(2x) + D \sin(2x)) &= \\ = (-2C + 4D) \cos(2x) + (-2D - 4C) \sin(2x) &= \sin(2x). \end{aligned}$$

Dermed må

$$-2C + 4D = 0 \quad \& \quad -2D - 4C = 1 \quad \implies \quad C = \frac{-1}{5} \quad \& \quad D = \frac{-1}{10},$$

som betyr at den generelle løsningen av differensialligningen er

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{-1}{5} \cos(2x) - \frac{1}{10} \sin(2x) + e^{-x}(A \cos(x) + B \sin(x)).$$

Til slutt vurderer vi initialbetingelsene. Først ser vi at

$$y(0) = \frac{-1}{5} + A = 1 \quad \implies \quad A = \frac{6}{5}.$$

Deretter finner vi

$$y'(x) = \frac{-2}{5} \sin(2x) - \frac{1}{5} \cos(2x) - e^{-x} \left(\frac{6}{5} \cos(x) + B \sin(x) \right) + e^{-x} \left(-\frac{6}{5} \sin(x) + B \cos(x) \right),$$

som gir at

$$y'(0) = -\frac{1}{5} - \frac{6}{5} + B = 0 \quad \implies \quad B = \frac{7}{5}.$$

Altså er løsningen

$$y = \frac{-1}{5} \cos(2x) - \frac{1}{10} \sin(2x) + e^{-x} \left(\frac{6}{5} \cos(x) + \frac{7}{5} \sin(x) \right).$$

Oppgave 7

Finn potensrekkeløsningen $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ av differensiallikningen

$$y'' + xy' + 2y = 0,$$

med initialbetingelser $y(0) = 1$ og $y'(0) = 2$.

Løsning

La $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ og $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}$. Hvis vi setter dette inn i differensiallikningen får vi

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \right) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

og ved å rydde i dette uttrykket finner vi

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n &= 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n &= 0, \\ 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n + 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n x^n &= 0, \\ 2a_2 + 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_n n + 2a_n)x^n &= 0, \\ 2a_2 + 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+2}(n+2)(n+1) + (n+2)a_n)x^n &= 0. \end{aligned}$$

Derfor må

$$2a_2 + 2a_0 = 0 \quad \text{og} \quad a_{n+2}(n+1) + a_n = 0,$$

så

$$a_2 = -a_0 \quad \text{og} \quad a_{n+2} = \frac{-a_n}{n+1}.$$

På grunn av initialbetingelsene har vi at $a_0 = 1$ og $a_1 = 2$. Da kan vi se at

$$a_0 = 1 \quad \text{og} \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$$

og

$$a_1 = 2 \quad \text{og} \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}n!}.$$

Oppgave 8

La $y(x)$ være løsningen av

$$y' = x^2 y^2 \quad \text{med} \quad y(0) = 1.$$

Bruk forbedret Eulers metode med $h = 0.1$ til å approksimere verdien av $y(x)$ i punktene

$$x_1 = 0.1 \quad \text{og} \quad x_2 = 0.2.$$

(Bruk kun 4 desimaler i utregningene dine.)

Løsning

La $y' = x^2 y^2 = f(x, y)$ med $y(0) = 1 = y_0$ og $x_0 = 0$.

$$x_1 = x_0 + 0.1 = 0.1 \quad \text{og} \quad u_1 = 1 + 0.1 \cdot f(0, 1) = 1,$$

$$y_1 = y_0 + 0.1 \cdot \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, u_1)}{2} = 1 + 0.1 \cdot \frac{f(0, 1) + f(0.1, 1)}{2} = 1 + 0.1 \cdot \frac{0 + (0.1)^2 1^2}{2} = 1.0005,$$

$$x_2 = x_1 + 0.1 = 0.2 \quad \text{og} \quad u_2 = y_1 + 0.1 \cdot f(x_1, y_1) = 1.0005 + 0.1 \cdot (0.1)^2 (1.0005)^2 = 1.0015,$$

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + 0.1 \cdot \frac{f(x_1, y_1) + f(x_2, u_2)}{2} = 1.0005 + 0.1 \cdot \frac{(0.1)^2 (1.0005)^2 + (0.2)^2 (1.0015)^2}{2} = \\ &= 1.0005 + 0.1 \cdot \frac{0.01 + 0.0401}{2} = 1.0030. \end{aligned}$$